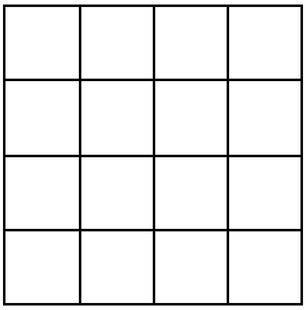
In ein Quadratgitter mit der Seitenlänge n werden Gitterquadrate verschiedener Größe eingezeichnet.



Gitterzahlen

Wie viele **Möglichkeiten** gibt es dafür? Bestimme die Folge der 'Gitterzahlen' .

Rechtecke im Quadratgitter

Wie viele Möglichkeiten gibt es, in das obige Quadratgitter **Rechtecke verschiedener Größe** einzuzeichnen?

Terme

Bestimme den **Anteil** der Quadrate an der möglichen Gesamtzahl der Rechtecke

Zeige der Term $\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{6}-\frac{n^2}{4}-\frac{n}{6}$ liefert über N nur natürliche Zahlen:

Untersuche die **Endstellen** in der Zahlenfolge der 'Gitterzahlen'.

3.Dimension

Wie viele **Würfel der Größe k** gibt es in einem Würfel der Größe n ? ($1 \leq k \leq n$).
Wie viele **Würfel** gibt es **insgesamt**?

Wie viele **Quader** gibt es?

Kehrwertsummen:

Welchen Grenzwert hat die Reihe zur **Kehrwerte der Gitterzahlen**?

Weitere Fragen:

Gibt es unter den Gitterzahlen $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ Dreieckszahlen der Gestalt k(k+1)/2 ?

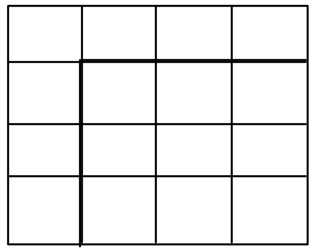
Gibt es in der Gitterzahlenfolge auch Quadratzahlen?

Vergleiche die ursprüngliche Problemstellung mit der entsprechenden Frage in Gittern aus gleichseitigen Dreiecken bzw. regelmäßigen Sechsecken.

Lösungshinweise

In ein Quadratgitter mit der Seitenlänge n werden Gitterquadrate verschiedener Größe eingezeichnet.

Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?



Es gibt 1 + 4 + 9 + ... n^2 Möglichkeiten.

Wegen 1 + 4 + 9 + ... n^2 $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

gibt es im Quadratgitter der Kantenlänge n

insgesamt $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ Quadrate verschiedner Größe.

Die 'Gitterzahlen' lautet also: 1, 5, 14, 30, 55, 91, 149, 204,..: (quadrat. Pyramidalzahlen)

Wie viele Möglichkeiten gibt es, in das obige Quadratgitter **Rechtecke verschiedener Größe** einzuzeichnen?

Es gibt $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ Möglichkeiten.

Man kann überprüfen, dass dies die Partialsummenfolge zur Reihe 1 + 2^3+ 3^3 + 4^3 + ... + n^3 darstellt.

Der **Anteil** der Quadrate an der möglichen Gesamtzahl der Rechtecke beträgt also**:** $\frac{4n+2}{3n(n+1)}$

Die **Differenzenfunktion** lautet: $\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2n+1}{3}\right) = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{4} - \frac{n}{6}$

Dieser **Term** der Differenzenfunktion liefert über N nur natürliche Zahlen **:**

Der Term n(n+1)(2n+1) liefert mit n =3k, n = 3k+1 und n =3k+2 Zahlen, die immer durch 6 teilbar sind.

oder: Die Terme $\frac{n^4}{4} - \frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{4}(n-1)(n+1)$ und $\frac{n^3}{6} - \frac{n}{6} = \frac{n}{6}(n-1)(n+1)$ liefern nur natürliche Zahlen.

Untersuche die Endstellen in der Zahlenfolge $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **.**

Es treten nur die Endstellen 0,1,4,5,6,9 auf.

Die Endstellenfolge hat eine Periode von 20 Stellen, da der Term

$$\frac{(n+20)(n+21)(2n+41)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 20n^2 + 420\,n + 2870 \text{ stets durch 10 teilbar ist.}$$

Wie viele **Würfel der Größe k** gibt es in einem Würfel der Größe n ? **(**$1 \le k \le n$ **).**

Wie viele Würfel gibt es insgesamt?

Für jeden Würfel der Größe k gibt es $(n-k+1)^3$ Möglichkeiten.

Die Gesamtsumme ist also $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$

Die Gesamtzahl aller Würfel im Würfelgitter entspricht also gerade dem Term für die Anzahl der Rechtecke im zweidimensionalen Quadratgitter.

Wie viele Quader gibt es? Es gibt $\frac{n^3(n+1)^3}{8}$ Quader im Gitterwürfel mit Kantenlänge n

Kehrwertsummen:

Die Kehrwertsumme der Dreieckszahlen hat als Grenzwert 2, die Kehrwertsumme der Quadratzahlen hat als Grenzwert $\frac{\pi^2}{6}$.

Welchen Grenzwert hat die Reihe zur **Kehrwerte der Gitterzahlen**?

Die Folge $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ liefert für den Grenzwert der Kehrwertsumme den Term:

18 - 24ln2 , d.h. ca. 1.364

Hinweise zur Begründung:

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}$$

$$\text{und } \sum\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = -1 + \sum\frac{2}{n} \qquad \text{und } \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \; \ldots.$$

Weitere Fragen:

Gibt es unter den Gitterzahlen $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ außer den Zahlen 55 (n= 5) und 91 (n=6) weitere Dreieckszahlen der Gestalt k(k+1)/2 ?

Gibt es in der Gitterzahlenfolge auch Quadratzahlen?

Vergleiche die ursprüngliche Problemstellung mit der entsprechenden Frage zu Gittern in gleichseitigen Dreiecken bzw. im regelmäßigen Sechseck, in das gleichseitige Dreiecke eingezeichnet sind.

Untersuche die Kehrwertsummen der 'Diagonalen' , (Partialsummenfolgen) im Pascaldreieck.