Junktoren der Aussagenlogik zur Verknüpfung zweier Aussagen A, B

Name	Zeichen	Bedeutung	Wahrheitstafel mit zugehöriger Dualzahl		Bemerkung
Tautologie		in jedem Falle wahr alles gilt	wwww	15	allgemeingültig
Exklusion NAND, Shefferstrich	$\mid$	höchstens eines nicht beides; nicht zugleich	fwww	7	$\neg A \vee \neg B$; $\wedge$ Neg.der Konj.
Implikation Subjunktion	$\rightarrow$	wenn A, dann B Nur dann A, wenn B	wfww	11	$\neg A \vee B$ A hinreichend für B
Replikation	$\leftarrow$	dann A, wenn B nur wenn A, dann B	wwfw	13	Umkehrung der Impl. A notwendig für B
Disjunktion	$\vee$	oder (einschließend) mindestens eines; vel	wwwf	14	$A \vee B$
Pränonpendenz	$\rceil$	keinesfalls das eine nicht A, unabhängig von B	ffww	3	$\neg A$
Postnonpendenz	$\lceil$	keinesfalls das andere	fwfw	5	$\neg B$
Äquivalenz Bijunktion	$\leftrightarrow$	genau dann, wenn	wffw	9	$(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$ notwendig u. hinreichend
Kontravalenz Antivalenz, Alternative aut - aut	$>\!-\!<$	entweder A, oder B	fwwf	6	Neg. Äquivalenz
Postpendenz	$\lfloor$	auf jeden Fall das andere	wfwf	10	B
Präpendenz Projektion	$\rfloor$	auf jeden Fall das eine A, unabhängig von B	wwff	12	A
Rejektion NOR, Peircepfeil	$\downarrow$	weder A, noch B beides nicht; keines	fffw	1	$\neg A \wedge \neg B$ Neg. der Disj.
Präsektion	$\_\!<$	das andere ohne das eine	ffwf	2	A nicht-notw. für B
Postsektion Subtraktion, Inhibition A und nicht B; A ohne B	$>\!-$	das eine ohne das andere	fwff	4	Neg. der Impl.
Konjunktion	$\wedge$	A und B beides; sowohl - als auch	wfff	8	$A \wedge B$
Antilogie Kontradiktion	$\perp$	in keinem Falle wahr nichts gilt	ffff	0	Neg. der Tautologie

Junktorenkreis mit Negation, Konversion und Dualisierung

Disjunktion
$A \vee B$

Rejektion, NOR
$\neg A \wedge \neg B$; $\downarrow$

Implikation
$\neg A \vee B$; $A \rightarrow B$

Postsektion
$A \vee \neg B$

Äquivalenz
$(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
$A \leftrightarrow B$

Kontravalenz
$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
$A >\!\!-\!\!< B$

Replikation
$A \wedge \neg B$; $A \leftarrow B$

Präsektion
$\neg A \wedge B$

Exklusion, NAND
$\neg A \vee \neg B$; $A \mid B$

Konjunktion
$A \wedge B$

Negation:

Vertauschung der Wahrheitswerte
Bildung des kontradiktorischen Gegensatzes
Spiegelung an der vertikalen Achse

Konversion:

Junktor der Negate
Bildung des konträren bzw. subkonträren Gegensatzes
(Konträre Aussagen können nicht zugleich wahr sein;
Subkonträre A. können nicht zugleich falsch sein)
Spiegelung an der horizontalen Achse.

Dualisierung:

Übergang zum dualen Junktor, d.h. Vertauschung von $\vee$ und $\wedge$
Die Dualisierung entspricht der Hintereinanderausführung von Konversion und Negation
Punktspiegelung am Mittelpunkt des Kreises

Die Hintereinanderausführung der Operationen Identität I, Negation N, Konversion K und Dualisierung D führt zu einer Verknüpfungsstruktur, die als Symmetriegruppe des Rechtecks oder als ‘Kleinsche Vierergruppe’ bezeichnet wird. Sie ist kommutativ u. nicht-zyklisch; jedes Element ist zu sich selbst invers:

	I	N	K	D
I	I	N	K	D
N	N	I	D	K
K	K	D	I	N
D	D	K	N	I

Logisches Quadrat: Grundstruktur und Beispiele

A	konträr	B
subaltern	kontradiktorisch	subaltern
C	subkonträr	D

Kontradikorisch: Die Aussagen schließen einander aus; Übergang durch Negation.
Konträr: Beide Aussagen sind unverträglich; konträre Aussagen können *nicht zugleich wahr* sein.
Aber: Konträre Aussagen können zugleich falsch sein! Übergang durch Konversion.
Subkonträr: Die Aussagen können *nicht zugleich falsch* sein. Übergang durch Konversion.
Subaltern: Die eine Aussage ist eine Abschwächung der anderen.

- Junktoren:

$p \wedge q$	konträr	$\neg p \wedge \neg q$
subaltern	kontradiktorisch	subaltern
$p \vee q$	subkonträr	$\neg p \vee \neg q$

und	konträr	weder - noch	$\wedge$	konträr	$\downarrow$
subaltern	kontradiktorisch	subaltern		kontradiktorisch	
oder	subkonträr	höchstens eines	$\vee$	subkonträr	$\vert$

- Urteile (mit den Quantoren **a**lle, k**e**ine, e**i**nige sind, einige sind nicht):

S a P	konträr	S e P	$\forall$	$\neg\exists$
subaltern	kontradiktorisch	subaltern		
S i P	subkonträr	S o P	$\exists$	$\neg\forall$

- Modalitäten:

notwendig	unmöglich	N	N$\neg$
möglich	nicht notwendig	M	$\neg$N

Tautologien:

Die logischen Ausdrücke sind immer - d.h. für alle wahrheitswerte der Aussagen p, q, r - wahr.

$p \vee \neg p$
Satz vom ausgeschlossenen Dritten

$\neg(p \wedge \neg p)$
Satz vom Widerspruch

$p \rightarrow p$
Reflexivität der Subjunktion

$(p \wedge q) \rightarrow p$
Abschwächung der Konjunktion

$p \rightarrow (p \vee q)$
Abschwächung zur Disjunktion

$p \rightarrow (q \rightarrow p)$
Paradoxie der Subjunktion

$\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
Paradoxie der Subjunktion

$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
Modus ponens, Abtrennungsregel

$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$
Modus tollens, Widerlegungsregel

$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
Kettenschluß, Transitivität

Logische Gesetze (Die Ausdrücke sind logisch äquivalent)

$p \rightarrow q = \neg p \vee q$

$p \leftrightarrow q = (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

$p >\!\!-\!\!< q = (\neg p \vee q) \vee (p \vee \neg q)$

$p \rightarrow q = \neg q \rightarrow \neg p$
Gesetz der Kontraposition

$p \wedge q = q \wedge p$; $p \vee q = q \vee p$
Kommutativgesetze

$(p \wedge q) \rightarrow r = p \rightarrow (q \rightarrow r)$
Exportationsgesetz

$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$
1. De Morgan-Gesetz

$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$
2. De Morgan-Gesetz

$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$

$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$
Assoziativgesetze

$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Distributivgesetze

Junktorenbasen:

Es genügen die Junktoren $\neg$, $\vee$, $\wedge$ (Boole-Basis).
Beispiele für die Darstellung der übrigen Junktoren:

$p \rightarrow q = \neg p \vee q$ Implikation

$p \leftrightarrow q = (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ Äquivalenz

$p >\!\!-\!\!< q = (\neg p \vee q) \vee (p \vee \neg q)$ Antivalenz

$p \downarrow q = \neg p \wedge \neg q$ Peircepfeil, Rejektion, NOR

$p \mid q = \neg p \vee \neg q$ Exklusion, Sheffer-Strich, NAND

Basis mit dem Sheffer-Strich als einzigem Junktor (NAND-Basis).
Beispiele für die Darstellung der übrigen Junktoren:

$\neg p = p \mid p$

$p \vee q = \neg p \mid \neg q$

$p \rightarrow q = \neg p \vee q = p \mid \neg q = p \mid (q \mid q)$

$p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q) = \neg(p \mid q) = (p \mid q) \mid (p \mid q)$

p q	$p \mid q$	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \mid \neg q$
1 1	0	1	0	0	1
1 0	1	1	0	1	1
0 1	1	1	1	0	1
0 0	1	0	1	1	0

Formulierungen und Beispiele zu Implikation, Replikation und Äquivalenz

Implikation (Subjunktion): $A \rightarrow B$

Nicht kausal; $\neg A \vee B$;

- Immer wenn A, dann B
- Immer B, wenn A
- B immer dann, wenn A
- Das eine - nämlich A - nicht ohne das andere - nämlich B
- B ist notwendig für A
- A ist hinreichend (hinreichende Bedingung) für B
- A genügt für B
- Nicht A, oder (aber) B
- Nur wenn B, dann A
- A nur dann, wenn B.

Beispiele:
Wenn der Tank leer ist, bleibt der Motor stehen.
Wenn 9 Teiler von z ist, dann ist auch 3 Teiler von z. (Wenn $9|z$, dann $3|z$.)
Wenn das Wetter schön ist , machen wir einen Ausflug.
Wenn das Wetter am Sonntag schön ist, gehen wir Eis essen.
Mir genügt es, Urlaub zu haben, um glücklich zu sein.
Wenn es regnet, ist die Straße naß.
Wenn heute der 30.Dezember ist, dann ist morgen Silvester.

Replikation: $A \leftarrow B$

Umkehrung der Implikation; Konverse Implikation

Wenn B, dann A; Dann A, wenn B
Nur wenn A, dann B; (d.h. Nur wenn A, dann möglicherweise B)
Wenn nicht A, dann (auch) nicht B; A ist notwendige Bedingung für B
B ist hinreichend für A; B nur dann, wenn A.

Beispiel: Das Kurkonzert findet nur bei gutem Wetter statt. ($W \leftarrow K$)

Äquivalenz: $A \leftrightarrow B$

- A dann und nur dann, wenn B
- A ist notwendig und hinreichend für B
- Wenn A, dann B und umgekehrt
- A genau dann, wenn B
- Immer und nur dann B, wenn A
- Wenn und nur wenn A, dann B
- Nicht eines allein
- (Entweder) beides oder keines
- Es sei denn nicht B.

Beispielsätze:
Der heilige Abend fällt genau dann auf einen Sonntag, wenn auch der Silvestertag auf einen Sonntag fällt.
Dieser Verein steigt ab, es sei denn er gewinnt noch alle anstehenden Spiele.

Übungen zur Aussagenlogik

1) Welche Beziehung besteht jeweils zwischen den Aussagen A und B ?
(Mit welchem Junktor läßt sich diese Beziehung darstellen?)

Einerseits A, andererseits B.	Wenn A, dann B und umgekehrt;
(Zwar) A, aber nicht B.	Nur wenn B, dann A.
B ist notwendig für A	Weder A noch B
B nur dann, wenn A	Nicht nur A, sondern auch B.
Das eine nicht ohne das andere	Wenn nicht A, dann (auch) nicht B
Sowohl A als auch B	A, es sei denn nicht B
Nicht zugleich A und B	Entweder A oder B
Das eine ohne das andere	A und trotzdem B
Einerlei ob A, jedenfalls B	Höchstens A

2)
Stelle mit dem ‘NAND- Junktor’ (Exklusion, Shefferstrich, |) die
Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\vee$ dar.

3) Der Wahrheitswerteverlauf eines zweiwertigen Junktors kann als vierstellige Dualdarstellung einer natürlichen Zahl k* interpretiert werden. Mit k=k*+1 entspricht jedem Junktor eine Wahrheitswertefunktion Φ_k.
So besitzt der Junktor ‘UND’ mit dem Wahrheitswerteverlauf 0001 die Wahrheitsfunktion Φ_2 , d.h. $\Phi_2(0,0) = 0$; $\Phi_2(0,1) = 0$; $\Phi_2(1,0) = 0$ und $\Phi_2(1,1) = 1$.

Für n-stellige Junktoren entsteht die Funktion Φ_k .
So ist z.B. $\Phi_{98} = 01100001$ und $\Phi_{98}(0,1,1) = \Phi_{98}(4.\ \text{Argument}) = 0$.
a) Wieviel n-stellige Junktoren gibt es?
b) Bestimme $\Phi_{88}(1,0,1)$.
c) Bestimme Φ_k zu $A\vee (B\wedge C)$. Vergleiche mit Φ_{88} .

4) Erstelle zu den Urteilen mit den Quantoren ‘alle, keine, einige, einige nicht’ ein logisches Quadrat.