LK12/KL2/LGW/BG

Analysis

Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x^2 - t}$, $t \neq 0$

1) Untersuche die Funktion f_1 und zeichne ihr Schaubild.

2) In welchem Punkt S schneidet K_t die 1. Winkelhalbierende ?

3) Zeige: Fast alle K_t haben einen Punkt gemeinsam. Bestimme die Ausnahme.

4) Zeige: Das Verhalten von f für $x \to \infty$ ist von t unabhängig.

5) Zeige: Bei der Extremstellenbestimmung von f_t führt das Newtonverfahren auf die Formel $x_{i+1} = \frac{2}{3} f_t(x_i)$.
Bestimme damit die Extremstellen von K_1 auf 3 Nachkommastellen genau.

6) Gib die Gleichung der <u>beiden</u> Ortslinien für die Extrempunkte von K_t an.

Analytische Geometrie

Gegeben sind die 4 Raumpunkte A(1/2/3), B(-2/4/1), C(1/3/3), D(4/1/5)

Zeige: Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm
Bestimme seinen Mittelpunkt M.
Gib die <u>Strecke</u> BC in vektorieller Schreibweise an.

Zeige, dass die Gerade (AC) die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ schneidet.

Auf welcher Geraden bewegt sich M, wenn das Viereck ABCD so in den Ursprung verschoben wird, dass D auf den Ursprung zu liegen kommt?

Lösungshinweise

Analysis

K_t hat nur für t > 0 senkrechte Asymptoten.

$$\frac{x^3+2}{x^2-t} = x \quad \text{ergibt} \quad x = -\frac{2}{t} \quad \text{und somit} \quad S(-\frac{2}{t} / -\frac{2}{t})$$

Aus $f_t(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2-t}$ folgt f(x) = 0 für $x = -\sqrt[3]{2}$ und $t \neq (-\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{4}$.

Für $t \neq \sqrt[3]{4}$ haben die Kurven den Punkt $N(-\sqrt[3]{2} \ / \ 0$ gemeinsam.

Polynomdivision ergibt $f_t(x) = x + \dfrac{tx+2}{x^2-1}$.

Der Bruchterm strebt unabhängig von t gegen Null. Somit ist die 1. Winkelhalbierende schräge Asymptote.

Es gilt $f_t'(x) = \dfrac{x(x^3-3tx-4)}{(x^2-t)^2}$ Zur Extremstellenbestimmung sind u.a. die Nullstellen der

Funktion $g(x) = x^3 - 3tx - 4$ aus dem Zähler der Ableitung von f_t zu berechnen.

Das Verfahren von Newton führt auf den Iterationsterm $x - \dfrac{x^3-3tx-4}{3x^2-3t}$.

Dies kann zu $\dfrac{2x^3+4}{3x^2-3t}$ umgeformt werden. Also gilt $x_{i+1} = \dfrac{2}{3}\dfrac{x_i^3+2}{x_i^2-t}$, d.h. $x_{i+1} = \dfrac{2}{3} f(x_i)$

Es gilt : $f_t'(x) = \dfrac{x(x^3-3tx-4)}{(x^2-t)^2}$. Es gilt f'(x) = 0 für x = 0.

Da für f'(x) an der Stelle 0 das Vorzeichen wechselt, ist die y-Achse eine Ortslinie der Extrempunkte.

Die zweite Ortslinie ergibt sich aus der Formel $y = \dfrac{Z'(x)}{N'(x)}$, da Z'(x) und N'(x) von t unabhängig sind. Dies ergibt als Ortslinie die Gerade mit der Gleichung y = 1.5x.

Geometrie

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$; $\vec{m} = \overrightarrow{OM} = 0.5 \cdot (\vec{a} + \vec{c})$, d.h. $M(1/2.5/3)$

$\overline{BC}: \quad \vec{x} = \vec{b} + t \cdot \overrightarrow{BC}$, $0 \le t \le 1$, d.h. $\overline{BC}: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 1$,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ergibt s = -5 u. t = -3 , d.h. S(1/-3/3) ; $h: x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$