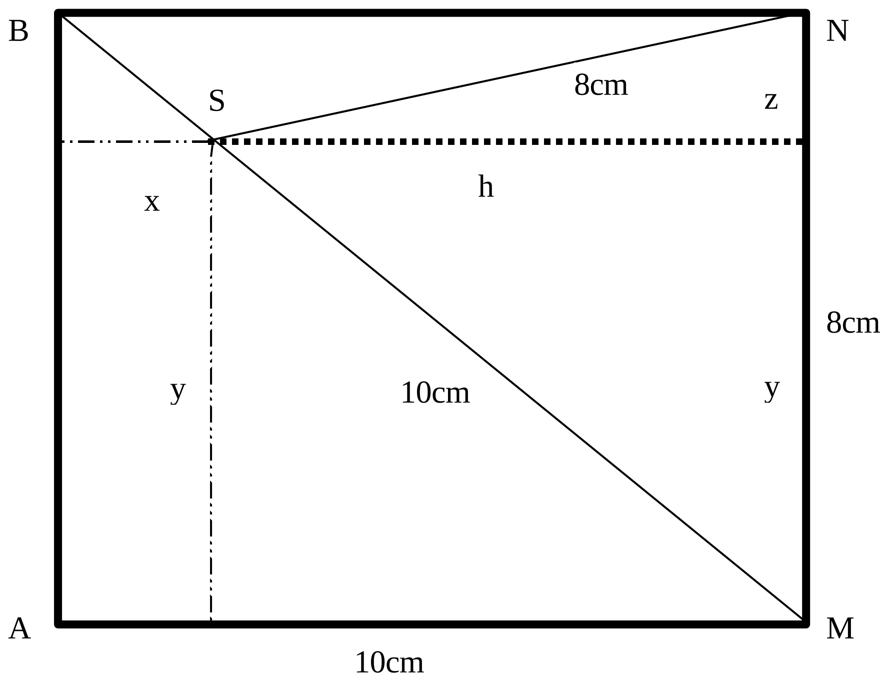
Genau oder knapp ? Liegt der Kreisschnittpunkt S auf der Diagonalen des Rechtecks?



Gegeben ist das Rechteck AMNB mit |AM| = 10cm und |AB| = 8cm

Sei |MS| = 10 cm und |NS| = 8 cm. **Gilt dann S(x / y) Î MB ?**

Lösungsplan: 1) Bestimme eine Geradengleichung zu MB
2) Bestimme die Koordinaten von S
3) Prüfe ob die Koordinaten von S die Gleichung der Geraden MB erfüllen.

1) MB: $y = -\frac{4}{5}x + 8$

2) Für die Koordinaten x und y von S gilt:

a) $x = 10 - h$; b) $h^2 + y^2 = 100$; c) $h^2 + z^2 = 64$; d) $y + z = 8$

Aus d) und c) folgt: $h^2 + (8 - y)^2 = 64$ und somit : e) $h^2 - 16y + y^2 = 0$

Subtrahiert man die Gleichung e) von b) so ergibt sich: $16y = 100$, d.h. $y = \frac{25}{4}$

Aus b) kann dann $h = \frac{5}{4}\sqrt{39}$ berechnet werden; also gilt: $x = 10 - \frac{5}{4}\sqrt{39}$

Der Punkt S(x/y) hat die Koordinaten: $S(10 - \frac{5}{4}\sqrt{39} / \frac{25}{4})$

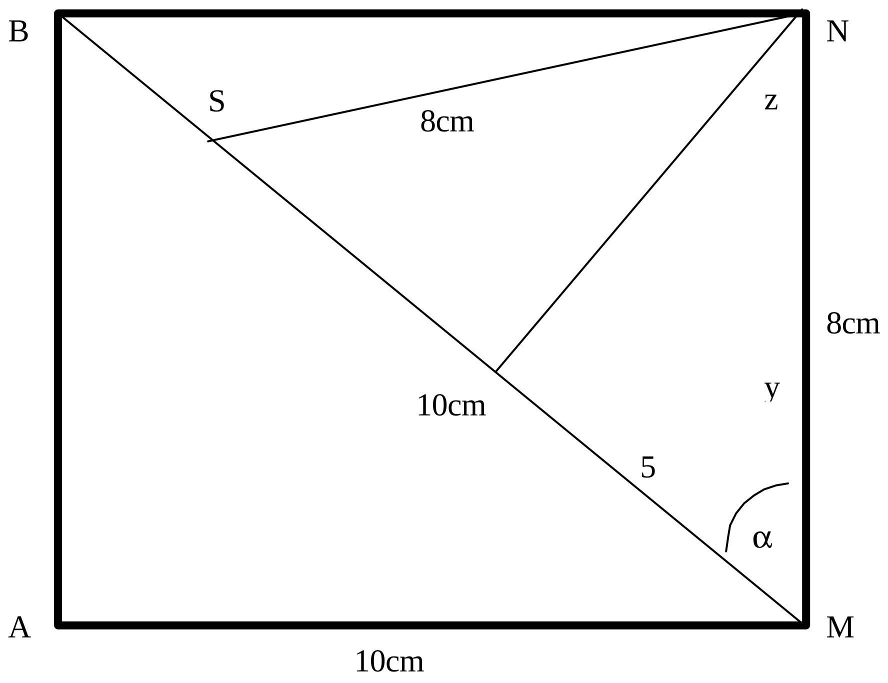
3) Da S rational in y und irrational in x ist, erfüllen die Koordinaten von S die Geradengleichung nicht, d.h. S kann nicht auf der Geraden MB liegen.

Der Punkt P auf (MB) mit der y-Koordinate $\frac{25}{4}$ hat die x-Koordinate $\frac{35}{16}$

Vergleicht man die x-Koordinaten von S und P so ergibt sich: $x_S \approx 2.19375$ und $x_P = 2.1875$, d.h. **S liegt ein knapp über der Rechtecksdiagonalen.**

Bemerkung: Man kann berechnen, dass der tatsächliche Abstand von S zur Diagonalen ca. 0.004 cm beträgt.

Liegt der Kreisschnittpunkt S auf der Diagonalen des Rechtecks?
Trigonometrischer Weg:



Für den Winkel $\alpha = \angle$ BMN gilt : $\tan\alpha = \frac{10}{8}$ und somit $\alpha \approx 51.340°$

Im gleichschenkligen Dreieck SMN gilt für $\alpha' = \angle$ SMN aber $\cos\alpha' = \frac{5}{8}$, d.h. $\alpha' \approx 51.318°$.

Da die beiden Winkel verschieden sind (um ca. 0.0223°) liegt S oberhalb der Diagonalen MB.

Im Rechteck mit den Seiten a und b liegt S **genau auf** der Diagonalen wenn gilt:

$\tan\alpha = \frac{a}{b}$ und $\cos\alpha = \frac{a}{2b}$ und somit $2\cos\alpha = \tan\alpha$; dies ergibt: $2\cos^2\alpha = \sin\alpha$

und führt auf die quadratische Gleichung:

$$2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 2 = 0 \text{ mit der Lösung } \sin\alpha = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$$

Aus $2\cos^2\alpha = \sin\alpha$ folgt $\cos\alpha = \sqrt{\frac{\sin\alpha}{2}}$ und daher $\tan\alpha = \sqrt{2\sin\alpha}$

Das gesuchte Seitenverhältnis lautet $\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{2}{-1+\sqrt{17}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} \approx 0.80024259$, also ein wenig größer als $\frac{4}{5}$

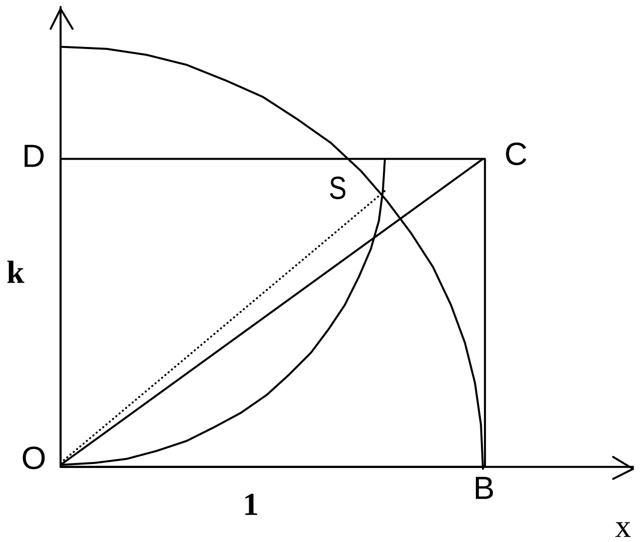
Wird also die Rechtecksseite b um ca. 1/40 mm auf 8.0024cm verlängert, dann liegt S (fast) genau auf der Diagonalen.

Bemerkung: Im Rechteck mit dem Verhältnis 1: $\sqrt{2}$ (DIN-A-Format ; $\frac{b}{a} \approx 0.707$) liegt S auf einer Rechteckseite.

Berechnung des Abstandes von S zur Diagonalen

Allgemeine Berechnung:

Im Rechteck mit den Seitenlängen 1 und k, $k > 0$ werden um den Ursprung O ein Kreis mit Radius OB und um die Ecke D ein Kreis mit Radius OD gezeichnet. Die Koordinaten des Schnittpunktes S werden berechnet.



Die Diagonale hat die Gleichung $y = kx$

Der Kreis um O hat die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$
Der Kreis um D hat die Gleichung $x^2 + (y-k)^2 = k^2$

Für $S(x_0 / y_0)$ folgt aus den beiden Gleichungen $y_0 = \frac{1}{2 \cdot k}$

Wegen $x_0 = \frac{1}{2k}\sqrt{4k^2 - 1}$ existieren nur für $k \geq 0.5$ Schnittpunkte.

Für den Schnittwinkel α der Geraden OS mit der x-Achse gilt $\sin\alpha = \frac{1}{2 \cdot k}$
Für den Schnittwinkel β der Diagonalen mit der x-Achse gilt $\tan\beta = k$
Zusammenfassend gilt also $2\sin\alpha \cdot \tan\beta = 1$
Ist δ der Differenzenwinkel so gilt für den Abstand d des Punktes S von der Diagonalen

allgemein $d = \sin\delta = \sin(\arcsin\frac{1}{2k} - \arctan k)$, $k \geq 0.5$;
für $k = 0.8$ ergibt dies $d = \sin(\arcsin 0.625 - \arctan 0.8) = 0.0039059...$
d.h. der Abstand beträgt ca. 1/25 mm

Alternative:

Für den Abstand d eines Punktes $S(x_s/y_s)$ zur Geraden mit $Ax+By+C = 0$ gilt die Formel

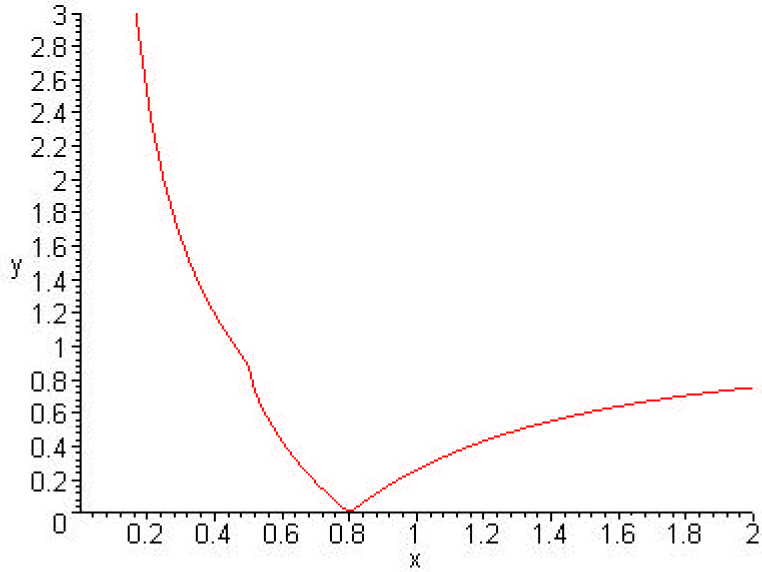
$$d = \left|\frac{Ax_s + By_s + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$. Dies ergibt für die Gerade mit $y = kx$ und $S(\frac{1}{2k}\sqrt{4k^2-1} / \frac{1}{2k})$

$$d = \left|\frac{1 - k\sqrt{4k^2-1}}{2k\sqrt{k^2+1}}\right|$$. Aus $d = 0$ folgt $4k^4 - k^2 - 1 = 0$ und $k = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} \approx 0.8002425$

.

Die Funktionen $f(k) = |\sin(\arcsin \frac{1}{2k} - \arctan k)|$ und $g(k) = \left|\frac{1 - k\sqrt{4k^2-1}}{2k\sqrt{k^2+1}}\right|$

liefern beide das folgende Schaubild.



Im Rahmen der Aufgabenstellung sind natürlich nur Funktionswerte für $k \geq 0.5$ sinnvoll.

Für spezielle Seitenverhältnisse ergeben sich folgende Abstände

k	0.5	$\sqrt{2}/2$	4/5	1	$\sqrt{2}$
d	$0.4\sqrt{5} \approx 0.89$	$\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6} \approx 0.169$	$\frac{25\sqrt{41}}{328} - \frac{\sqrt{1599}}{82} \approx 0.00039$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \approx 0.2588$	$\frac{\sqrt{6} - 2\sqrt{21}}{12} \approx 0.56$