

Dreiecksbeziehungen im Rechteck

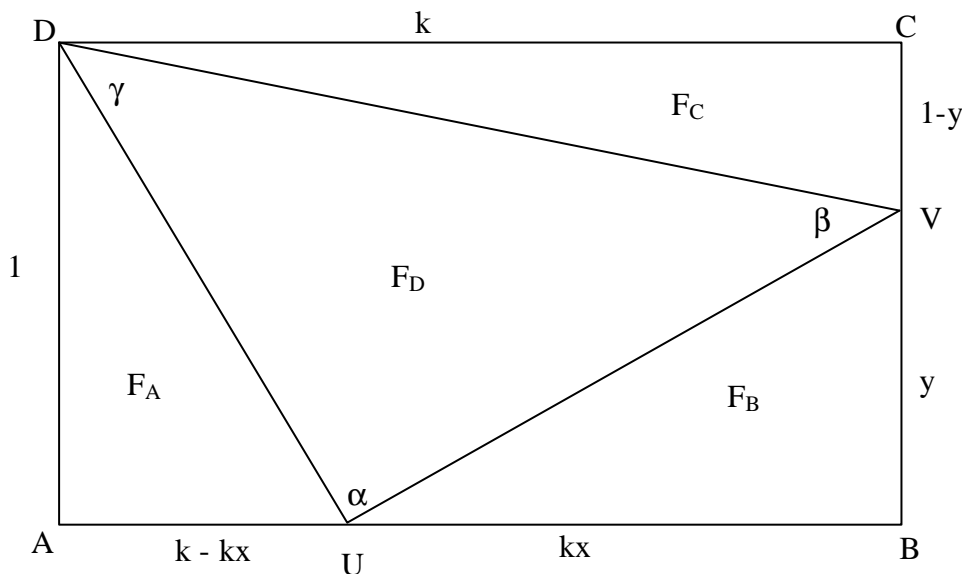
Einem Rechteck ABCD wird ein Dreieck UVD einbeschrieben, wobei U auf AB und V auf BC liegen. Auf diese Weise entstehen drei weitere Dreiecke im Rechteck. Die vier Dreiecke haben die Inhalte F_A , F_B , F_C und F_D . Das Rechteck habe die Seitenlängen 1 und k.

1. Gibt es ein Rechteck in dem U und V so festgelegt werden können, dass die vier Dreiecke den gleichen Flächeninhalt haben? Dies ist nicht möglich wie z.B. folgende Überlegung zeigt:

Aus $F_A = \frac{k}{4}$ und $F_C = \frac{k}{4}$ folgt, dass U und V jeweils auf der Seitenmitte liegen müssen.

Somit gilt $F_B = \frac{k}{8}$ und daher $F_C > \frac{k}{4}$.

2. Welche Bedingungen gelten für U und V, wenn wenigstens gilt: $F_A = F_B = F_C$?



U teile AB in Strecken der Längen $|AU| = k - kx$ und $|UB| = kx$ auf. V teile BC in Strecken der Länge y und $1 - y$ auf. Aus $F_A = F_C$ folgt $k(1 - x) = k(1 - y)$ und somit $x = y$

$$\text{Aus } F_A = F_B \text{ und } x = y \text{ folgt } k(1 - x) = kx^2 \text{ und somit } x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Ist g der goldene Schnitt mit $g^2 = g + 1$ so ist $x = g - 1 = \frac{1}{g}$. Für die Strecke der Länge $|VC| = 1 - x$

gilt dann $1 - x = 1 - (g - 1) = 2 - g = \frac{1}{g^2}$. Damit teilt V die Strecke BC im Verhältnis $g:1$, d.h.

im goldenen Schnitt. Entsprechendes gilt daher auch für den Punkt V auf AB.

Insgesamt ergibt sich $|AU| = \frac{k}{g^2}$, $|UB| = \frac{k}{g}$, $|BV| = \frac{1}{g}$ und $|VC| = \frac{1}{g^2}$

Für die Flächeninhalte folgt dann (ebenfalls ohne Maßeinheit)

$$F_A = F_B = F_C = \frac{k}{2g^2} = \left(1 - \frac{g}{2}\right)k = (1 - \cos 36^\circ)k = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}k \approx 0.191k$$

$$\text{Für } F_D \text{ folgt also } F_D = k - 3\left(1 - \frac{g}{2}\right)k = \left(\frac{3}{2}g - 2\right)k = (3\cos 36^\circ - 2)k = \frac{(3\sqrt{5} - 5)}{4}k \approx 0.427k$$

Es gilt weiter $F_D = \sqrt{5} F_A$.

Die Flächenanteile sind unter den gegebenen Bedingungen also alle unabhängig von der Rechtecksform!

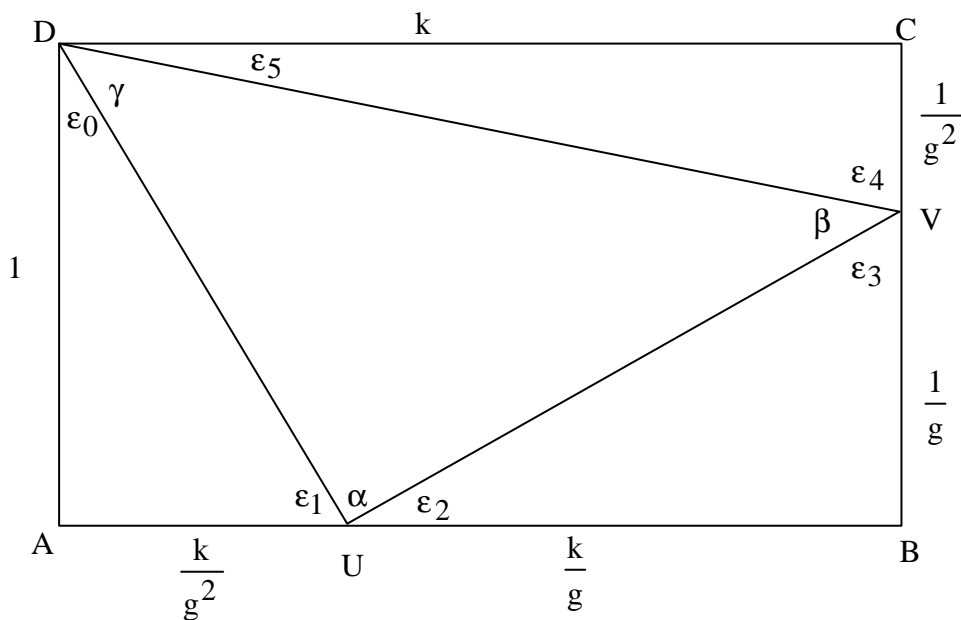
Haben im Rechteck ABCD mit dem Seitenlängen 1 und k die Dreiecke ΔAUD , ΔUBV und ΔVCD gleichen Flächeninhalt, dann teilen U und V die Rechteckseiten im goldenen Schnitt g, wobei für g gilt $\frac{1}{g} = g - 1$ und $\frac{1}{g^2} = 2 - g$ und somit $\frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} = 1$

Die Dreiecke ΔAUD , ΔUBV und ΔVCD haben dann (ohne Maßeinheit) jeweils den Flächeninhalt

$$F = \frac{k}{2g^2} \text{ bzw. } F = \frac{k}{3 + \sqrt{5}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} k \approx 0.191k$$

Satz:

Haben im Rechteck ABCD die Dreiecke ΔAUD , ΔUBV und ΔVCD gleichen Flächeninhalt, dann gilt $\cot \alpha + \cot \beta = \cot \gamma$. (s. Bild)



Für die folgenden Tangensberechnungen werden nebenstehende Formeln verwendet:

$$\tan(\delta_1 + \delta_2) = \frac{\tan \delta_1 + \tan \delta_2}{1 - \tan \delta_1 \cdot \tan \delta_2} ; \quad \tan(180^\circ - \delta) = -\tan \delta \quad \text{und} \quad \tan(90^\circ - \delta) = \cot \delta$$

Mit den Tangenswerten der Winkel ε_i können die Tangens- bzw. Cotangenswerte der Winkel α , β und γ bestimmt werden.

$$\left. \begin{array}{l} \tan \varepsilon_1 = \frac{g^2}{k} \\ \tan \varepsilon_2 = \frac{1}{k} \end{array} \right\} \tan \alpha = -\tan(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -\frac{\frac{g^2}{k} + \frac{1}{k}}{1 - \frac{g^2}{k^2}} = \frac{k(g^2 + 1)}{g^2 - k^2}, \quad k \neq g$$

$$\left. \begin{array}{l} \tan \varepsilon_3 = k \\ \tan \varepsilon_4 = g^2 k \end{array} \right\} \tan \beta = -\tan(\varepsilon_3 + \varepsilon_4) = -\frac{k + g^2 k}{1 - g^2 k^2} = \frac{k(g^2 + 1)}{g^2 k^2 - 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \tan \varepsilon_5 = \frac{1}{g^2 k} \\ \tan \varepsilon_0 = \frac{k}{g^2} \end{array} \right\} \cot \gamma = \tan(\varepsilon_5 + \varepsilon_0) = \frac{\frac{k}{g^2} + \frac{1}{g^2 k}}{1 - \frac{k}{g^4 k}} = \frac{g^2(k^2 + 1)}{k(g^4 - 1)} = \frac{\sqrt{5}(k^2 + 1)}{5k}$$

$$\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} = \frac{g^2 - k^2 + g^2 k^2 - 1}{k(g^2 + 1)} = \frac{(g^2 - 1) \cdot (k^2 + 1)}{k(g^2 + 1)} = \frac{(g^2 - 1)^2 \cdot (k^2 + 1)}{k(g^4 - 1)}$$

Wegen $g^2 - 1 = g$ kann dies umgeformt werden zu

$$\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} = \frac{g^2(k^2 + 1)}{k(g^4 - 1)} = \cot \gamma; \text{ d.h. es gilt } \cot \alpha + \cot \beta = \cot \gamma$$

Sonderfälle:

Im Quadrat gilt $\tan \alpha = \tan \beta = \sqrt{5}$ und $\tan \gamma = \frac{\sqrt{5}}{2}$, d.h. $\alpha = \beta \approx 65.9^\circ$ und $\gamma_{\max} \approx 48.19^\circ$

Auch für $k = g$ ist das Dreieck UVD gleichschenkelig: Basis VD und rechter Winkel bei U!