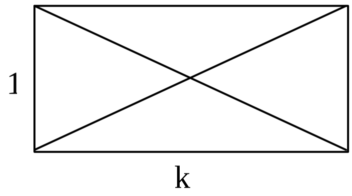
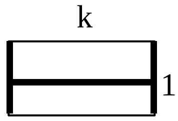
Wir bleiben in Verbindung! -
Vergleich von Verbindungsnetzen für die Eckpunkte eines Rechtecks

Gegeben ist ein Rechteck mit den Seitenlängen 1 und k, $k > 1$

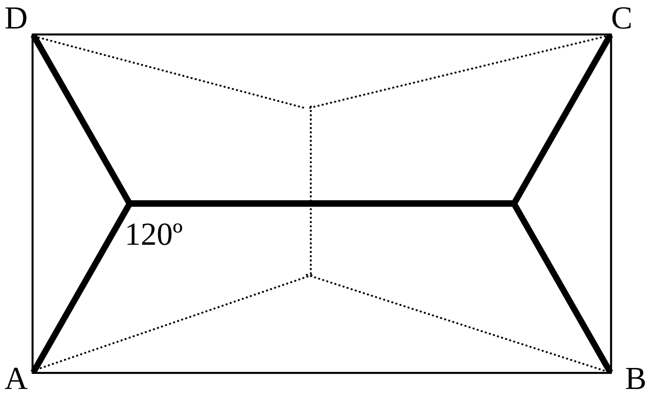
1) Das Diagonalenkreuz als Verbindungsnetz hat die Länge $\mathbf{L_1} = 2\sqrt{k^2+1}$



2) Das |___| - förmige Verbindungsnetz führt auf die Länge $\mathbf{L_2} = k+2$



3) Zeichnet man über der kleinen Rechteckseite jeweils ein gleichschenkliges Dreieck mit Basiswinkel $30°$ und verbindet die Spitzen der beiden Dreiecke, durch eine Mittelparallele des Rechtecks, so entsteht ein Netz mit der Länge $4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + k - 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}$. Zusammengefasst gilt $\mathbf{L_3} = k + \sqrt{3}$. Die Strahlen treffen sich im Winkel von $120°$ (im Fermat-Punkt)



4) Errichtet man die Dreiecke über der langen Rechteckseite k, was nur für $k \le \sqrt{3}$ überschneidungsfrei möglich ist, so entsteht ein Netz der Länge $\mathbf{L_4} = \sqrt{3}k + 1$.

Der Vergleich der Weglängen ergibt sich aus den folgenden Ungleichungen:

Für $1 \le k \le \frac{4}{3}$ gilt $k + \sqrt{3} \le \sqrt{3}k + 1 < 2\sqrt{k^2+1} \le k + 2$, d.h. $\mathbf{L_3} \le \mathbf{L_4} < \mathbf{L_1} \le \mathbf{L_2}$

Für $\frac{4}{3} < k \le \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ gilt $k + \sqrt{3} < \sqrt{3}k + 1 \le k + 2 < 2\sqrt{k^2+1}$, d.h. $\mathbf{L_3} < \mathbf{L_4} \le \mathbf{L_2} < \mathbf{L_1}$

Diese Ungleichung gilt also im Intervall $1.333 < x < 1.366$

Für $\frac{1+\sqrt{3}}{2} < k \le \sqrt{3}$ gilt $k + \sqrt{3} < k + 2 < \sqrt{3}k + 1 \le 2\sqrt{k^2+1}$, d.h. $\mathbf{L_3} < \mathbf{L_2} < \mathbf{L_4} \le \mathbf{L_1}$

Beispiele für Netzlängen bei verschiedenen Seitenverhältnissen im Rechteck

Netzlänge	$k = 1$	$k = 4/3$	$k = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1.366$	$k = \sqrt{2}$	$k = \sqrt{3}$	$k = 2$	$k = \sqrt{5}$
$L_3 = k + \sqrt{3}$	$1+\sqrt{3} \approx 2.73$	≈ 3.06	$0.5(1+3\sqrt{3}) \approx 3.1$	$\sqrt{2}+\sqrt{3} \approx 3.1$	$2\sqrt{3} \approx 3.46$	$2+\sqrt{3} \approx 3.73$	$\sqrt{3}+\sqrt{5} \approx 3.9$
$L_4 = \sqrt{3}k + 1$	$1+\sqrt{3} \approx 2.73$	≈ 3.309	$0.5(\sqrt{3}+5) \approx 3.366$	$\sqrt{6}+1 \approx 3.45$	4	-	-
$L_2 = k+2$	3	$3\frac{1}{3} \approx 3.33$	$0.5(\sqrt{3}+5) \approx 3.366$	$2+\sqrt{2} \approx 3.41$	$2+\sqrt{3} \approx 3.73$	4	$2+\sqrt{5} \approx 4.23$
$L_1 = 2\sqrt{k^2+1}$	$2\sqrt{2} \approx 2.83$	$3\frac{1}{3} \approx 3.33$	$\sqrt{2\sqrt{3}+8} \approx 3.38$	$2\sqrt{3} \approx 3.46$	4	$2\sqrt{5} \approx 4.47$	$2\sqrt{6} \approx 4.9$

Beim Längenvergleich von Verbindungsnetzen im Würfel mit Kantenlänge 1 können die Formeln des Rechtecks verwendet werden.

1) Die 4 Raumdiagonalen haben die Gesamtlänge $R_1 = 4\sqrt{3} \approx 6.93$

2) Auf gegenüberliegenden Grundfläche werden Pyramiden der Höhe h errichtet. Die aufeinanderzeigenden Pyramidenspitzen werden verbunden. Die Gesamtlänge wird durch die Funktion $R_2(h) = 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + 1 - 2 \cdot h = 8\sqrt{h^2 + \frac{1}{2}} + 1 - 2h\ ,\ 0 \le h \le \frac{1}{2}$

   berechnet. Die Randwerte lauten $R_2(0) = 4\sqrt{2} + 1 \approx 6.65$; $R_2(0.5) = 4\sqrt{3}$

   Die Extremstellenbestimmung ergibt $h_E = \sqrt{\frac{1}{30}} = \sqrt{0.0\overline{3}} \approx 0.183$

   und liefert als minimale Gesamtlänge den Wert $R_2 = \sqrt{30} + 1 \approx 6.477$

3) Bildet man auf zwei gegenüberliegenden Wandflächen jeweils den Minimalweg mit der Länge $1+\sqrt{3}$, so ergibt sich die Gesamtlänge $R_3 = 2(1+\sqrt{3}) + 1 \approx 6.464$

4) Bildet man den Minimalweg auf zwei sich kreuzenden Diagonalwänden mit $k = \sqrt{2}$, so ergibt sich die Länge $R_4 = 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \approx 6.2925$ und damit der (wahrscheinlich) kleinstmögliche Wert.