

Krank oder nicht krank - zur 'Bedingten Wahrscheinlichkeit'

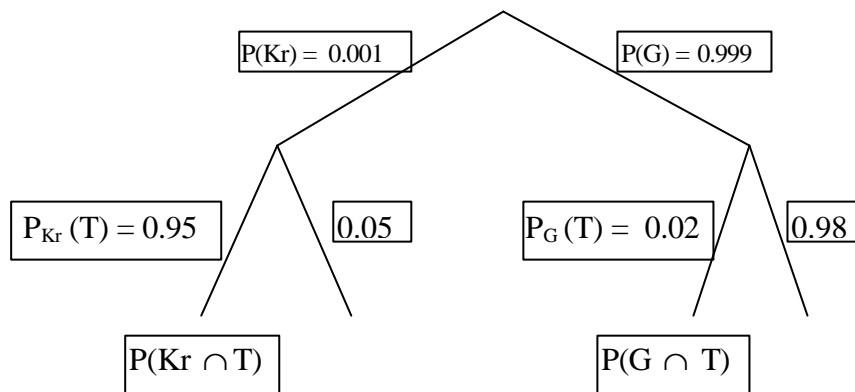
Durch einen recht zuverlässigen Vorsorgetest wird bei Mr. Bayes eine Erkrankung diagnostiziert. Die Krankheit hat eine Verbreitungsquote von ein Promille. Wenn der Proband erkrankt ist, so ist der Test mit der Wahrscheinlichkeit von 95% positiv. Ist der Proband nicht erkrankt, dann ist der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 98% negativ.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Mr. Bayes nun wirklich krank?

Kr (Krank) ; G(Gesund) ; T (Test 'positiv')

Bestimme : $P_T(\mathbf{Kr})$, d.h. die P(Krank unter der Bedingung 'Test positiv')

Gegeben: $P(\mathbf{Kr}) = 0.001$; $P_{\mathbf{Kr}}(T) = 0.95$; $P_G(T) = 0.02$



Es gilt: $P(T) = P(\mathbf{Kr}) \cdot P_{\mathbf{Kr}}(T) + P(G) \cdot P_G(T)$

Aus

$$P(\mathbf{Kr} \cap T) = P(\mathbf{Kr}) \cdot P_{\mathbf{Kr}}(T)$$

$$P(T \cap \mathbf{Kr}) = P(T) \cdot P_T(\mathbf{Kr})$$

folgt

$$\begin{aligned} P_T(\mathbf{Kr}) &= \frac{P(\mathbf{Kr}) \cdot P_{\mathbf{Kr}}(T)}{P(T)} \\ &= \frac{P(\mathbf{Kr}) \cdot P_{\mathbf{Kr}}(T)}{P(\mathbf{Kr}) \cdot P_{\mathbf{Kr}}(T) + P(G) \cdot P_G(T)} \end{aligned}$$

$$\text{Somit: } P_T(\mathbf{Kr}) = \frac{0.001 \cdot 0.95}{0.001 \cdot 0.95 + 0.999 \cdot 0.02} \gg 0.0459 ,$$

d.h. Mr. Bayes ist mit weniger als 5% Wahrscheinlichkeit tatsächlich erkrankt.

Beispiel: Bei $P_{\mathbf{Kr}}(T) = 99.9\%$ und $P_G(T) = 0.1\%$ ergibt sich $P_T(\mathbf{Kr}) = 50\%$