Kombinatorik zum 'Gummibärchen-Orakel'

Ziehe aus einer (vollen) Tüte mit Gummibärchen der Farben *Rot, Gelb, Weiß, Grün, Orange* insgesamt 5 Bärchen und sortiere die gezogenen Bärchen in obiger Farbreihenfolge.
Ein Ergebnis lautet z.B. *R R Gr Gr Or.* Zu jedem Ergebnis gehört ein Orakelspruch.
Wie viele Orakel sind möglich? Die Gummibärchen dürfen nach dem Orakelspruch gegessen werden!

Zurückführung auf eine kombinatorische Grundaufgabe

Wir stellen uns für jede Menge von Gummibärchen einer Farbe eine repräsentierende Kugel entsprechender Farbe vor, die **mit** Zurücklegen gezogen wird. Es sind also 5 verschiedene Kugeln in der Urne. Beim Ergebnis sind durch das Zurücklegen der jeweils gezogenen Kugel Wiederholungen der Farbe möglich. Es wird nicht auf die Reihenfolge geachtet, da die gezogenen Kugeln nach k -maligem Ziehen anschließend der Farbe nach auf fünf Farbenplätze in der Abfolge *Rot, Gelb, Weiß, Grün, Orange* sortiert werden.

Ein mögliches Ergebnis sieht also wie folgt aus:

Rot	Gelb	Weiß	Grün	Orange
2	0	0	2	1

Damit haben wir die Aufgabe die Anzahl der **Kombinationen** (Auswahlen ohne Beachtung der Reihenfolge) **mit Wiederholung** zu bestimmen. Dabei ist n = 5 (Anzahl der Farben, d.h. Anzahl der verschiedenen Kugeln in der Urne) und k = 5 (Anzahl der gezogenen Kugeln).

Dieses Problem kann weiter übersetzt werden, so dass schließlich die Formel zur 'Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung' verwendet werden kann.
Dazu beschreiben wir jeden möglichen Ausgang durch eine Zeichenfolge aus Sternchen und Strichen. Die Anzahl der Sternchen gibt an wie viele Elemente auf einem Platz sind; ein Strich gibt an, wenn ein neuer Platz beginnt.

Das Ergebnis

Rot	Gelb	Weiß	Grün	Orange
2	0	0	2	1

kann durch die Folge

////* beschrieben werden.

Das Ergebnis

Rot	Gelb	Weiß	Grün	Orange
0	3	1	1	0

wird dann durch die Folge

/***/*/*/ beschrieben.

Insgesamt zeigt sich, dass bei n (farblich) verschiedenen Kugeln und k gezogenen Kugeln jedes Ergebnis durch eine Kombination von n-1 Strichen und k Sternchen beschrieben wird.
Ordnet man jedem Stern und jedem Strich eine Stelle zu so bedeutet dies:
Auf n -1 + k Stellen werden k Sternchen verteilt .
Es werden aus n - 1 + k Stellen also k Stellen ausgewählt, die ein Sternchen tragen.
Dies entspricht der Aufgabe aus einer Urne mit n -1 + k verschiedenen Kugeln ohne Zurücklegen k Kugeln zu ziehen (ohne Beachtung der Reihenfolge).

Dafür gibt es aber $\binom{n-1+k}{k}$ Möglichkeiten. Der Term $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\cdot k!}$ ergibt für n = 5 und k = 5 den Wert $\frac{9!}{4!\cdot 5!}$. Somit gibt es 126 verschiedene Gummibärchen-Orakel.

Bg 2001