Aspekte zur Approximation von Quadratwurzeln

- Intervallschachtelung
- Intervallhalbierungsverfahren
- Heron-Verfahren
  - Rechnerische und anschauliche Herleitung
  - Zusammenhang mit Newtonverfahren
  - Monotonie und Beschränktheit der Näherungsfolge
  - Konvergenzeigenschaft des Heron-Verfahrens
  - Flußdiagramm zum Heron-Verfahren
  - Tabellenkalkulation(Exel) zum Heron-Verfahren
- Alternatives Verfahren mit Hilfe von Lösungen der 'Pellschen Gleichung'
- Beispiel einer alternierenden Folge mit Grenzwert $\sqrt{2}$

Intervallschachtelung für $\sqrt{2}$

$1 < \sqrt{2} < 2$ da $1^2 < 2 < 2^2$

$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ da $1,4^2 = 1,96 < 2 < 2,25 = 1.5^2$

$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ da $1,41^2 = 1,9881 < 2 < 2,0164 = 1,42^2$

.....

Intervallhalbierungsverfahren für $\sqrt{k}$

Es wird ein Intervall [a,b] mit $a \leq \sqrt{k} \leq b$ bestimmt

Vom Intervall [a,b] ausgehend wird $m = \frac{a+b}{2}$ gebildet.

Wenn $m^2 > k$ ist, wird für das nächste Intervall $b = \frac{a+b}{2}$ gesetzt, d.h. die obere Grenze des neuen Intervalls ergibt sich als arithmetisches Mittel der alten Grenzen.

Andernfalls, d.h. wenn $m^2 \leq k$ gilt wird $a = \frac{a+b}{2}$ gesetzt.

Das Verfahren wird solange wiederholt, bis die Länge des Intervalls [a,b] eine vorgegebene Größe ε unterschreitet.

Heronverfahren:

Das Verfahren ist schon vor über 3000 Jahren bei den sumerischen Mathematikern (ca. 2000 v. Chr.) bekannt und nach Heron von Alexandria (ca. 75 v. Chr) benannt.

Rechnerische Herleitung : Bestimme die (positive) Lösung der Gleichung $x^2 = 2$

Es gilt: $x = 1 + d$, wobei d die Differenz zwischen dem Näherungswert 1 und der unbekannten Lösung x ist.
Somit folgt: $x^2 = (1 + d)^2 = 1 + 2d + d^2 .= 2$

Wenn d genügend klein ist, kann d^2 gegenüber 2d vernachlässigt werden und wir erhalten aus $1+2d = 2$ den Wert $d = \frac{1}{2}$ und somit den Näherungswert $x = \frac{3}{2}$

Aus dem Ansatz $x = \frac{3}{2} + d$ ergibt sich entsprechend $x = \frac{17}{12}$. Das Verfahren ergibt immer bessere Näherungsbrüche für $\sqrt{2}$.

Allgemein ergibt das Näherungsverfahren für $\sqrt{k}$:

$x_1 = x_0 + d$, also $(x_0 + d_1)^2 = k$ und somit $x_0^2 + 2x_0 d_1 + d_1^2 = k$

Wenn d_1^2 vernachlässigbar klein ist, gilt näherungsweise: $d_1 = \frac{k - x_0^2}{2x_0}$ und wegen $x_1 = x_0 + d_1$ folgt

: $x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{k}{x_0})$

Anschauliche Herleitung für das 'Heronverfahren':

Aus einem Rechteck mit Flächeninhalt k, der Seite a und deren Partnerseite b $(= \frac{k}{a})$ ist schrittweise! ein Quadrat herzustellen.

Die neue Rechteckseite entsteht jeweils durch Bildung des arithmetischen Mittels aus zu kleiner und zu großer Seite.

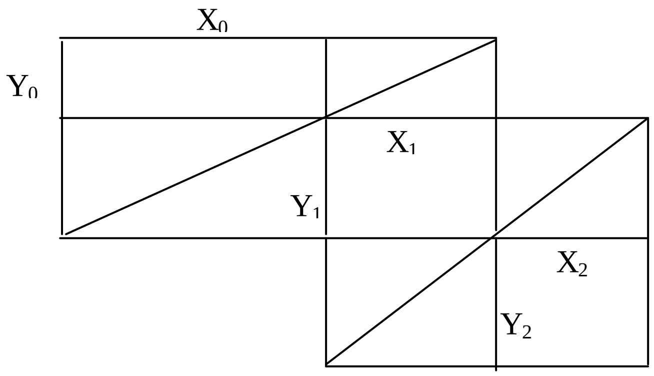
$x_0 = a$; $y_0 = b = \frac{k}{a}$ und somit: $x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{k}{x_0})$; $y_1 = \frac{k}{x_1}$

allgemein:

$x_{neu} = \frac{1}{2}(x_{alt} + \frac{k}{x_{alt}})$ oder $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{k}{x_n})$

(Hinweis: Durch eine Konstruktion mit dem Höhensatz wird ein Rechteck in einem Schritt in das dazu flächeninhaltsgleiche Quadrat verwandelt.)

Auf Grund der Flächengleichheit im ‘Ergänzungsrechteck’ kann das Verfahren wie folgt veranschaulicht werden.



Eigenschaften der Approximation

Sei $x_0 > \sqrt{k} > \frac{k}{x_0}$.

1)

Dann gilt: $x_i^2 > k$ d.h. $x_i > \sqrt{k}$ für alle i ; d.h. die Näherungsfolge ist beschränkt.

Zeige: Aus $x_i > \sqrt{k}$ folgt $x_{i+1} > \sqrt{k}$

$(x_i - \sqrt{k})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x_i^2 + 2x_i\sqrt{k} + k \geq 0 \Leftrightarrow x_i^2 + k \geq 2x_i\sqrt{k} \Leftrightarrow$

$\frac{x_i^2 + k}{2x_i} \geq \sqrt{k} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_i + \frac{k}{x_i}) \geq \sqrt{k}$

2) $x_{i+1} < x_i$ für alle i ; d.h. die Folge der Näherungswerte ist monoton fallend.

Begründung:

Es gilt: $x_i - \frac{k}{x_i} > 0 \Leftrightarrow 2x_i - x_i - \frac{k}{x_i} > 0 \Leftrightarrow x_i - \frac{1}{2}(x_i + \frac{k}{x_i}) > 0 \Leftrightarrow x_i - x_{i+1} > 0$

Wegen $x_0 > \sqrt{k} > \frac{k}{x_0}$ ist somit die folge der Näherungswerte fallend.

3) Das Heronverfahren ist ein Sonderfall des Newtonverfahrens für $f(x) = x^2 - k$, $x > 0$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \; ; \; x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2 - k}{2x_i} = \frac{1}{2}(x_i + \frac{k}{x_i})$$

4) Das Heronverfahren kann mit arithmetischem, geometrischem und harmonischem Mittel beschrieben werden:

$x_{i+1} = A(x_i \, , \frac{k}{x_i})$;

$y_{i+1} = \frac{k}{x_{i+1}} = \frac{2k}{x_i + y_i} = \frac{2x_i y_i}{x_i + y_i} = H(x_i, y_i)$

Das harmonische Mittel wird z.B. bei der Berechnung von Durchschnittsgeschwindigkeiten verwendet.

$x_i \rightarrow \sqrt{k} = \sqrt{x_o y_0} = G(x_0, y_0)$

Das geometrische Mittel wird z.B. bei der Berechnung des durchschnittlichen Zinssatzes verwendet.

5) Konvergenz des Verfahrens:

Für den relativen Fehler e_i im i-ten Schritt gilt: $e_i = \frac{x_i - \sqrt{k}}{\sqrt{k}}$

Somit ist $x_i = (1 + e_i)\sqrt{k}$

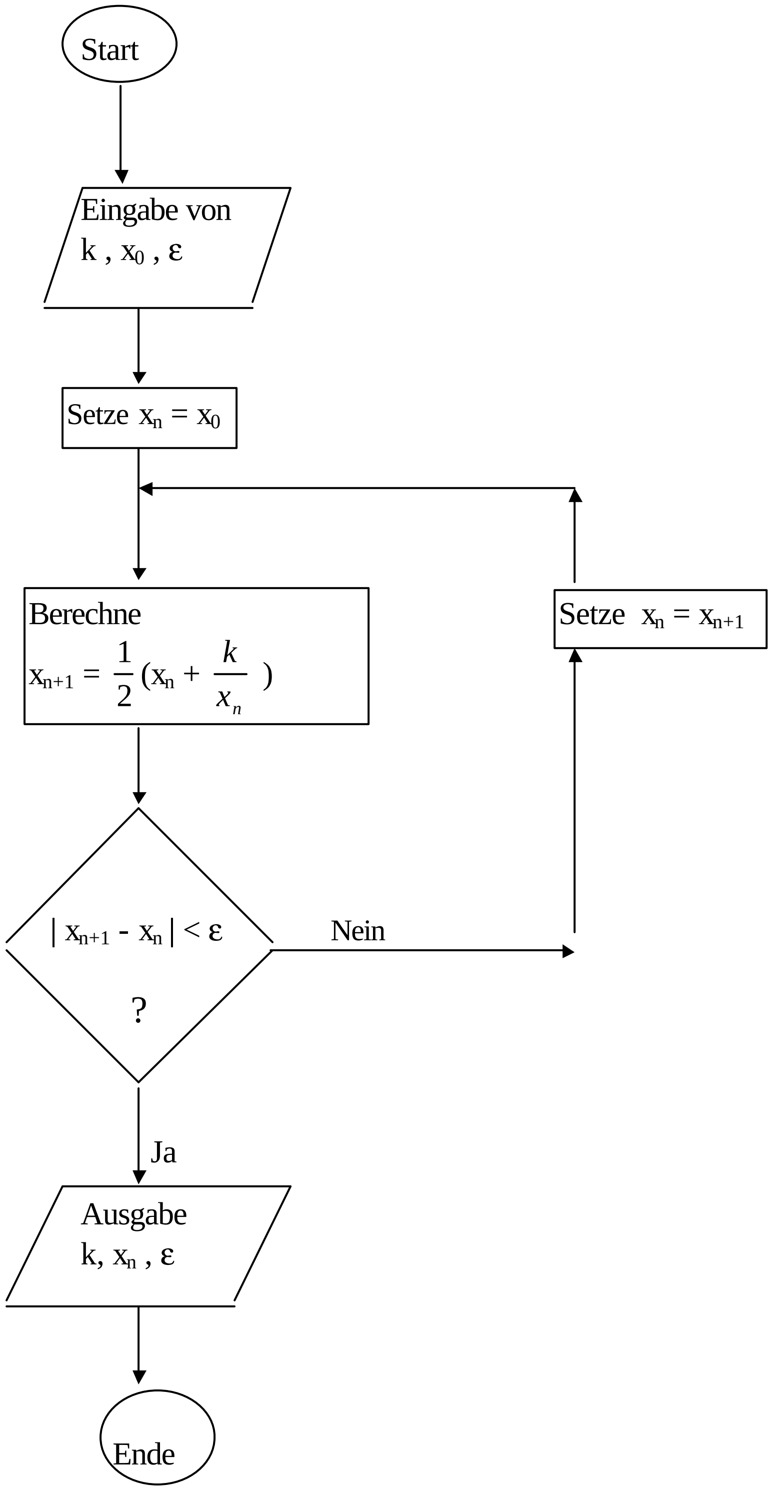
Aus $x_{i+1} = \frac{1}{2}((1+e_i)\sqrt{k} + \frac{k}{(1+e_i)\sqrt{k}})$ folgt

$$x_{i+1} = \frac{\sqrt{k}}{2}\left(\frac{(1+e_i)^2+1}{1+e_i}\right) = \frac{\sqrt{k}}{2}\left(2 + \frac{e_i^2}{1+e_i}\right) = \sqrt{k}\left(1 + \frac{e_i^2}{2(1+e_i)}\right)$$

Somit gilt: $e_{i+1} = \frac{e_i^2}{2(1+e_i)}$ und daher $e_{i+1} < \frac{e_i^2}{2}$.

Das Heronverfahren zeigt somit quadratische Konvergenz.

Flußdiagramm zum Heronverfahren



'Tippfolge' zum Heronverfahren $\sqrt{k}$ mit Taschenrechner

Startwert **x_0 ;**

+	1/x	*	k	=	:	2	=

n - mal

Heronverfahren mit einem Tabellenkalkulationsprogramm (Excel)

Heron-Verfahren:	Wurzel	aus	20	
Schritt	Näherungswert	Partnerseite	Fehler	Quadrat
0	20			
1	10,5	1,904761905	8,595238095	110,25
2	6,202380952	3,224568138	2,977812814	38,46952948
3	4,713474545	4,243154346	0,470320200	22,21684229
4	4,478314445	4,465965989	0,012348457	20,05530027
5	4,472140217	4,472131693	0,000008524	20,00003812
6	4,472135955	4,472135955	0,000000000	20
Wurzel aus	20	ist	4,472135955	

A	B	C	D	E
Heron-Verfahren:	Wurzel	aus	20	
Schritt	Näherungswert	Partnerseite	Fehler	Quadrat
0	= D1			
1	= 0,5 * (B6+ $D$1/B6)	= $D$1/B7	=B7- C7	= B7 *B7
=A7 +1	= 0,5 * (B7+ $D$1/B7)	= $D$1/B8	=B8- C8	= B8 *B8
=A8 +1	= 0,5 * (B8+ $D$1/B8)	= $D$1/B9	=B9- C9	= B9 *B9
=A9 +1	= 0,5 * (B9+ $D$1/B9)	= $D$1/B10	=B10- C10	= B10 *B10
=A10 +1	= 0,5 * (B10+ $D$1/B10)	= $D$1/B11	=B11- C11	= B11 *B11
=A11 +1	= 0,5 * (B11+ $D$1/B11)	= $D$1/B12	=B12- C12	= B12 *B12
Wurzel aus	= $D$1	ist	= B12	

Approximation von $\sqrt{k}$ mit der Gleichung $Z^2 = k\, N^2 + 1$ (Pellsche Gleichung)

Für große Werte von Z und N liefert diese Gleichung:

$\frac{Z^2}{N^2} = k$, d.h. der Bruch $\frac{Z}{N}$ liefert einen Näherungswert für $\sqrt{k}$

Hat man für die Gleichung eine (nichttriviale) Lösung gefunden, so kann mit den folgenden Rekursionsformeln eine größere Lösung angegeben werden.

I) $N_{n+1} = 2\, N_n\, Z_n$

II) $Z_{n+1} = 2\, k\, N_n^2 + 1 \quad (= 2Z_n^2 \; -1)$

Begründung:

Ersetzt man in $Z^2 = k\, N^2 + 1$ Z durch $Z = 2\, Z^2 - 1$ und N durch $N = 2N\, Z$

so erhält man: $(2Z^2 - 1)^2 = k(2NZ)^2 + 1$

$\Leftrightarrow \qquad 4Z^4 - 4Z^2 + 1 = 4N^2Z^2 + 1$

$\Leftrightarrow \qquad Z^2 - 1 = k\, N^2$

$\Leftrightarrow \qquad Z^2 = kN^2 + 1$

Beispiele für Startwerte zu gegebenem k:

k	2	3	5	6	7	8	10	11	12	13	14
Z_0 / N_0	3 /2	2/1	9/4	5/2	8/3	3/1	19/6	10/3	7/2	649/180	15/4

Beispiel:
Für $\sqrt{2}$ ergibt sich mit dem Startwert (3/2) die Folge:

(3 / 2) ; (17 / 12) ; (577 / 408) ; (665857 / 470832) ; ...

Der Bruch $\frac{665857}{470832}$ = 1,4142136 stimmt mit $\sqrt{2}$ auf 7 Nachkommastellen überein.

Hinweis:

Wegen $\left|\sqrt{k} - \frac{Z}{N}\right| \leq \sqrt{\left|\left(\sqrt{k} - \frac{Z}{N}\right)\left(\sqrt{k} + \frac{Z}{N}\right)\right|} = \sqrt{\left|k - \frac{Z^2}{N^2}\right|} = \frac{1}{N}$

konvergiert die Näherungsfolge.

Beispiel für eine alternierende Folge die gegen $\sqrt{2}$ konvergiert

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1} \;; \quad x_0 > 0$$

Aus $\sqrt{2} < x_n$ folgt:

$2 < x_n^2$ $\qquad x_n^2 + 2 < 2\,x_n^2 \quad x_n^2 + 4$

$$x_n + 4 < 2\,x_n^2 + 4x_n + 2$$

$$(x_n + 2)^2 < 2(x_n + 1)^2$$

$$\left(\frac{x_n + 2}{x_n + 1}\right)^2 < 2 \text{ , d.h. } x_{n+1} < 2$$

Entsprechend folgt aus $\sqrt{2} > x_n$ die Ungleichung $\sqrt{2} < x_{n+1}$.

Der Abstand der Folgeglieder zu $\sqrt{2}$ nimmt in jedem Schritt ab.

Begründung:

$| x_n - \sqrt{2} > |\frac{x_n + 2}{x_n + 1} - \sqrt{2}|$, d.h. z.B.

$$x_n - \sqrt{2} > \sqrt{2} - \frac{x_n + 2}{x_n + 1} > 0$$

Die wahre Aussage

$$1 > \sqrt{2} - 1 > \frac{\sqrt{2} - 1}{x_n + 1} \quad \text{für } x_n > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 > \frac{\sqrt{2} - 1}{x_n + 1} \quad | * (x_n - \sqrt{2})$$

$$> 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_n - \sqrt{2} > \sqrt{2} - \frac{x_n + 2}{x_n + 1}$$

kann zu $\qquad x_n - \sqrt{2} > \sqrt{2} - x_{n+1}$ äquivalent umgeformt werden.