Johannes Kepler - Eine Revolution des Denkens: Vom Kreis zur Ellipse !

Research is to see what everybody has seen and to think what nobody has thought. (A.Szent-Györgyi)

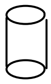
Aristoteles: Der geradlinigen Bewegung ist wiederum die Kreisbewegung vorgeordnet; sie ist nämlich in höherem Grade einfach und vollkommen...
Es ist nun aber sowohl der Natur wie auch dem Begriffe wie auch der Zeit nach das Vollkommene dem Unvollkommenen vorgeordnet; ebenso das Unvergängliche dem Vergänglichen. Vorgeordnet ist auch diejenige Bewegung, die ewig zu dauern vermag, vor derjenigen, die dies nicht vermag. Die Kreisbewegung kann ewig dauern; von den anderen Bewegungen vermag dies weder eine der Ortsbewegungen noch irgendeine andere Bewegung ...
Vor dem antiken Hintergrund bezeichnet Kepler seine Entdeckung von der Ellipsenbahn des Mars zunächst als einen 'Karren von Mist'. Später kommentiert die Antike wie folgt:
Sie philosophieren von allen Bewegungen, die in sich selbst zurückkehren, sei die Kreisbewegung die einfachste und vollkommenste von allen, den Ellipsen und ähnlichen Figuren sei etwas gerades beigemischt. Daher ist die Kreisbewegung jene die der einfachsten Natur der Körper am besten entspricht, die von göttlichen Geistern getrieben werden.
Darauf möchte ich so antworten: Erstens, wenn die himmlischen Bewegungen das Werk eines Geistes wären, wie die Alten glaubten, dann wäre der Schluss ziemlich überzeugend, die Planetenbahnen würden vollkommene Kreise beschreiben....
Aber die Himmelsbewegungen sind nicht das Werk eines Geistes, sondern der Natur, das heißt der natürlichen Kraft der Körper, oder das Werk einer Seele, die gemeinsam mit jenen körperlichen Kräften in Übereinstimmung ist.

Mit diesen Überlegungen von Kepler wird deutlich, dass nicht der Übergang vom Kreis zur Ellipse (Die Ellipse der Erdumlaufbahn ist ein 'Fast-Kreis' mit einer Exzentrizität von 3% !) eigentlich entscheidend ist, sondern der zugrunde liegende Paradigmenwechsel:
Die bewegende Macht ist nicht mehr ein Geist oder Gott, sondern die empirisch beobachtbare und durch physikalische Gesetze beschreibbare Natur mit ihren spezifischen Kräften.

Bemerkung zum 3. Keplerschen Gesetz:
Nur ein Harmoniesüchtiger, von der Sicherheit getragen, dass Maß und Ordnung der Welt sich in Zahlenverhältnissen ausdrücken lassen, kann in der intensiven Suche nach Proportionen ein Gesetz der Art finden, dass das Quadrat einer Größe zur 3. Potenz einer anderen Größe proportional ist.

Kepler fand bei der Auswertung der astronomischen Daten Gesetzmäßigkeiten, die als überzeugende Hin- und Beweise für das heliozentrische Weltbild bedeutend waren. Die Beobachtungen und Folgerungen von Kopernikus und Galilei waren weder 'sonnenklar' noch widerspruchsfrei. Kopernikus verwendete noch 'Kreisbahnen' und Galilei wusste nicht wie sein 'Zauberwerkzeug' - das Fernrohr - funktioniert.
Keplers Wunsch die Einheit von Glauben und Verstehen zu wahren erklärt seinen lebenslange Arbeit an 'Welten-Formeln', seine lebenslange Suche danach, was die (astronomische) Welt im Innersten zusammenhält.
Keplers Werke:

1596	Mysterium Cosmographicum (Weltgeheimnis)
1604	Astronomiae Pars Optica
1609	Astronomia nova (Neue Astronomie) mit Keplergesetz 1 und 2
1610	Dissertation cum nuncio sidereo ('Unterredung mit dem Sternenboten' ; für Galilei)
1611	Dioptrice
1619	Harmonice mundi (Weltharmonik) mit 3.Keplergesetz
1627	Tabulae Rudolphinae (Rudolphinische Tafeln)



Keplersche Fassregel

Für das Volumen eines Körpers mit der ***Höhe h***,
der ***unteren Querschnittsfläche A***,
der ***mittleren Querschnittsfläche B***
und der ***oberen Querschnittsfläche C*** gilt:

$$\mathbf{V \approx \frac{h}{6}\,(A + 4B + C)}$$

Ich ließ mir etliche Fässer ins Haus bringen und einkellern. Vier Tage danach kam der Verkäufer mit einer Meßrute, einer einzigen nur, mit der er von allen Fässern ohne Rücksicht auf die geometrische Gestalt, ohne weitere Überlegung oder Rechnung den Inhalt ermittelte. Er schob einfach die metallene Spitze der Rute durch das Spundloch des Fasses schräg hinein bis zur tiefsten Stelle des einen und dann des anderen kreisförmigen Holzdeckels, die in der Umgangssprache Böden heißen. Erwies sich die Länge vom höchsten Punkt des Bauches bis zum tiefsten der kreisrunden Bretter beiderseits als gleich, so gab er nach der Zahlenmarke, die an der Rute am Ende der gemessenen Länge aufgeprägt war, die Zahl der Eimer an, die das Faß halten sollte.
J. Kepler, im Herbst 1613

Diese Formel ist eine Verallgemeinerung der Volumenformel für verschiedene Körper:

Prisma (z.B. Würfel, Quader) mit Grundfläche G: $V = h(G + 4G + G)/6 = \mathbf{G \cdot h}$

Kreiszylinder: $V = h(\pi r^2 + 4\pi r^2 + \pi r^2)/6 = \boldsymbol{\pi r^2 h}$

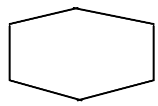
Kreiskegel: $V = h(0 + 4\pi(r/2)^2 + \pi r^2)/6 = \boldsymbol{\frac{1}{3}\pi r^2 h}$

Kegelstumpf: $V = h(\pi r^2 + 4\pi(R+r)^2/4 + \pi R^2)/6 = \boldsymbol{\frac{1}{3}\pi\,(r^2 + rR + R^2)\,h}$

Kugel: $V = 2r(0 + 4\pi r^2 + 0)/6 = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi r^3}$

Rotationsparaboloid (zu $y = \sqrt{\frac{r^2}{h}x}$) $V = h\,(0 + 4\pi r^2/2 + \pi r^2)/6 = \boldsymbol{\frac{1}{2}\pi r^2 h}$

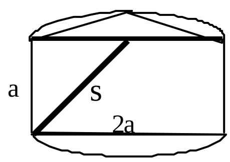
Entsprechendes gilt für Kugelabschnitt, Pyramide, Pyramidenstumpf und Doppelkegelstumpf .



Näherungsformel für **Rotationskörper**: $\pi\int_0^h f^2(x)\,dx \approx \frac{\pi}{6}(f^2(a) + 4\cdot f^2(m) + f^2(b))\cdot h = \frac{h}{6}(A+4B+C)$

Für $f(x) = rx+s$ oder $f(x) = \sqrt{qx^2 + rx + s}$ (mit den Rotationskörpern Zylinder, Kegel , Kugel, Rotationsparaboloide und -ellipsoide) ergeben sich exakte Werte.

Visiermethode beim österreichischen Fass:
mit 'kubischer Visierrute'



Das Fass wird durch einen Zylinder mit doppelter Höhe wie Durchmesser ersetzt.

Es gilt:

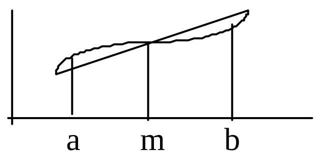
$$V = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 2a\,.\ \text{Wegen } s^2 = 2a^2 \text{ folgt: } V = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}s^3 = 0{,}5553...s^3 \approx 0{,}6s^3$$

In der Ebene gilt die Kepler-Regel als Flächeninhaltsformel

Für den Flächeninhalt unter einer Kurve K_f im Intervall [a,b], mit m als Mitte des Intervalls gilt:

$$\mathbf{A \approx \frac{b-a}{6}\,[f(a) + 4f(m) + f(b)]}$$

Sonderfall der Simpsonregel !



Die Formel liefert für Polynomfunktionen zweiten und dritten Grades exakte Werte.

Für Polynomfunktionen 4.Grades mit $f(x) = px^4 + ...$ lautet der Fehlerterm $\frac{p}{120}\cdot(b-a)^5$.