

Das 6461-Problem - ein Beispiel für entdeckende 'Zahlentheorie'

Erste Beobachtungen

$$\frac{2 \cdot 2}{2+2} = 1 ; \quad \frac{27}{9} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{3+3+3} = 3 ; \quad \frac{70}{14} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{2+5+7} = 5 ;$$

$$\frac{72}{12} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}{2+2+2+3+3} = 2 \cdot 3 ; \quad \frac{84}{14} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7}{2+2+3+7} = 7$$

$$\frac{105}{15} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3+5+7} = 7 ; \quad 6461 = 7 \cdot 13 \cdot 71 \quad \text{und} \quad \frac{7 \cdot 13 \cdot 71}{7+13+71} = 71$$

Bei diesen Zahlen ist das Primteilerprodukt (d.h. die Zahl) durch die Primteilersumme teilbar.

Definition Zahlen mit obiger Eigenschaft heißen '**nette Zahlen**'.

Welche Zahlen haben diese Eigenschaft?

Beispiele für nette Zahlen:

2, 3, 4, 5, 7, 11, 13, 16, 17, 19, 23, 27, 29, 30, ..., 60,
70, 71, 72, 73, ..., 84, 105, 150, 180, 220, 231, 240, 256, 286, 288, 308, 378,

Satz Es gibt keine nette Zahlen aus genau zwei, voneinander verschiedenen Primfaktoren.

Begründung:

Da p, q Primfaktoren sind ist die Gleichung $\frac{p \cdot q}{p+q} = x$ nur für $x = p$ oder $x = q$ lösbar. (

Nur für $p = q = 2$ ergibt sich die Möglichkeit $x = 1$)

O.B.d.A. folgt aus $\frac{p \cdot q}{p+q} = p$ dann $p \cdot q = p^2 + q \cdot p$ und somit $p^2 = 0$.

oder: Aus $p+q = p^i q^j$, mit i, j aus $\{0, 1\}$ folgt entweder $i = 0$ oder $j = 0$ und somit ein Widerspruch.

Problem: Wie konstruiert man zu einer gegebenen Zahl a die aus n , ($n > 1$) Primfaktoren besteht ihre oder ihren netten Nachfolger aus genau / mindestens $n+1$ Primfaktoren ?

Satz

Für drei Primfaktoren p, q, r folgt aus der Gleichung $\frac{p \cdot q \cdot r}{p + q + r} = x$ dass nur die Fälle $x = p$, $x = q$ oder $x = r$ möglich sind, da die Fälle $x = pq$ oder $x = pr$ oder $x = qr$ wie oben auf einen Widerspruch führen.

Sei o.B.d.A. $x = r$. Dann kann die Gleichung $\frac{p \cdot q \cdot r}{p + q + r} = r$ umgeformt werden zu

$$p \cdot q - (p + q) = r.$$

Kurz: In $p + q + r = p^i q^j r^k$ mit $i, j, k \in \{0, 1\}$ muss genau ein Exponent 0 sein.

Es ist also zu überprüfen, für welche Primzahlpaare die Differenz aus Produkt und Summe der beiden Primzahlen wieder eine Primzahl ergibt.

Beispiele:

$$q = 2 \text{ führt auf } p - 2 = r.$$

Diese Gleichung trifft auf alle Primzahlzwillinge $r, r+2$ zu. Ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt ist unbekannt.

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \text{ und } \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2 + 3 + 5} = 3; \quad 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \text{ und } \frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{2 + 5 + 7} = 5$$

$$286 = 2 \cdot 11 \cdot 13 \text{ und } \frac{2 \cdot 11 \cdot 13}{2 + 11 + 13} = 11$$

$$q = 3 \text{ führt auf } 2p - 3 = r$$

$$p = 5: \quad 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \text{ und } \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3 + 5 + 7} = 7$$

$$p = 13 \quad 897 = 3 \cdot 13 \cdot 23 \text{ und } \frac{3 \cdot 13 \cdot 23}{3 + 13 + 23} = 23$$

$$q = 7 \text{ führt auf } 6p - 7 = r$$

$$p = 13 \quad \text{aus } q = 7 \text{ und } p = 13 \text{ folgt } r = 71.$$

d.h. der einzig mögliche 'nette Nachfolger' von 91 aus 3 Primfaktoren ist die Zahl 6461

$$\frac{6461}{91} = \frac{7 \cdot 13 \cdot 71}{7 + 13 + 71} = 71$$

$$p = 17 \quad 6 \cdot 17 - 7 = 95, \text{ d.h. es gibt keine Lösung der Gestalt } 7, 17, r$$

'Familien' von netten Zahlen

Satz Alle Primzahlen sind nette Zahlen.

Definition:

Nette Zahlen aus mindestens 2 Primfaktoren heißen '**echt-nett**'.

Satz: Das Quadrat einer geraden netten Zahl ist nett, d.h. ist a nett und gilt $2|a$ dann gilt auch a^2 ist nett.

Beispiel: 30, 900, 810000, ...; aber: $78^2 = \underline{6084}$ ist nett und 78 nicht! ;

Allgemeine Begründung für Zahlen der Form a^p und $p|a$.

Satz: Zahlen der Form $2^p p^2$ sind nett. Beispiele: 72, 800, 6272, ...

Allgemein gilt: $q^p \cdot p^{q(q-1)}$ sind nette Zahlen, z.B. $3^p p^6$, $5^p p^{20}$

$$\text{Begründung: } \frac{q^p \cdot p^{q(q-1)}}{p \cdot q + q \cdot (q-1) \cdot p} = \frac{q^p \cdot p^{q(q-1)}}{q^2 p} = q^{p-2} p^{q(q-1)-1}$$

Satz: Zahlen der Form 2^{2^n} sind nett.

Allgemein gilt: p^{p^n} ist eine 'echt-nette' Zahl'. Beispiel: $3^{3^2} = 19683$; $\frac{3^9}{27} = 729$

$$\text{Begründung: } \frac{p^{p^n}}{p^n \cdot p} = p^{p^n - (n+1)} .$$

Dies ist eine natürliche Zahl da für alle p, n gilt $p^n - (n+1) > 0$.

Satz: Ist a eine nette Zahl und durch p teilbar, dann ist auch a^p eine nette Zahl.

$$\text{Beispiel: Aus } 7|84 \text{ folgt } \frac{84^7}{2 \cdot 14 + 3 \cdot 7 + 7 \cdot 7} = \frac{29509034655744}{49} = 301112598528$$

$$\text{Begründung: Mit der Primfaktorsumme } s \text{ gilt: } \frac{a^p}{p \cdot s} = \frac{a}{s} \cdot \frac{a}{p} \cdot a^{p-2}$$

Die drei Faktoren der rechten Seite der Gleichung sind natürliche Zahlen.

Satz: Ist a eine nette Zahl, so ist auch a^a eine nette Zahl.

Beispiele: 3 und 3^3 ; 30 und 30^{30} ; 5^5 ist echt-nett, aber nicht 5; weder 6 noch 6^6 sind nett.

$$\text{Begründung: Sei } s \text{ die Primfaktorsumme von } a. \text{ Dann ist } \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}{s + s + s + \dots + s} = \frac{a^a}{s \cdot a} = \frac{a}{s} \cdot a^{a-2}$$

Satz: Es gibt keine ungeraden netten Zahlen aus genau 2n Primfaktoren

Begründung: Es gilt $p+q+r+s... = p^i q^j r^k s^l ...$ mit Exponenten 0 oder 1.
 Die Primzahlen p,q,r,s ... sind ungerade, wie auch jedes Produkt dieser Zahlen.
 Die Summe ist aber bei 2n Summanden gerade.

Beispiele: 16, 30, 150, 220, $1122 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17$, $58718 = 2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 157$
 6461 hat keinen 'netten Nachfolger' aus 4 Primfaktoren, d.h. $p \cdot 6461$ ist nie nett! aber :
 $6461 \cdot 3 \cdot 47 = 6461 \cdot 141 = 911001$ ist der kleinste Nachfolger von 6461 aus genau 5
 Primfaktoren. Dabei gilt: $911001 / 91 = 10011$; $(91+1001)/91 = 1092/91 = 12$
 Zu 105 gibt es keinen ungeraden 'netten Nachfolger' aus 4 Primfaktoren;
 aber $8 \cdot 105 = 840$.

'Unvollständige Familien von netten Zahlen'

Satz: Zahlen der Form $2^{2n} \cdot 3 \cdot 5$ sind nett für $n = 0.5, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 13, ...$
 dabei ist 13 das letzte ungerade n.

| | | | | | | | | | |
|---|-----|----|-----|-----|------|-------|--------|----------|-----|
| n | 0.5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 10 | 13 |
| | 30 | 60 | 240 | 960 | 3840 | 15360 | 245760 | 15728640 | ... |

Satz: Zahlen der Form $2^{2n} \cdot 5 \cdot 11$ sind nett für $n = 1, 4, 6, 7, 18, 51, ...$ Bsp: $55 * 2^{102}$

Interessante Beispiele für nette Zahlen

$15015 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$; $316470 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 137$; $572033 = 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$

Ein 'netter Nachfolger' von **2002** ist $2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 149 = 298298$;

Beispiele zur Abfolge der netten Zahlen:

Vier aufeinanderfolgende Zahlen: 70, (71), 72, (73) (einziges Beispiel?)

$286 = 2 \cdot 11 \cdot 13$, $288 = 2^5 \cdot 3^2$; $8084 = 2^2 \cdot 43 \cdot 47$, $8085 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$;

Bereich mit vielen 'netten Zahlen' : (2957), 2958, (2963), 2964, 2967, (2969), 2970, (2971),

Ein Bereich ohne nette Zahlen liegt zwischen 1276 und 1404

Definition: **'Grundzahlen'** sind nette Zahlen ohne echt-nette Teiler.

Beispiele: 70, da $T_{70} = \{1, 2, 5, 7, 10, 12, 35, 70\}$
 72, da $T_{72} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$
 105 da $T_{105} = \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105\}$;
 6461 da $T_{6461} = \{1, 7, 13, 71, 91, 497, 923, 6461\}$

Gegenbeispiele (Nette Zahlen, die eine echt-nette Zahl als Teiler haben)

$$\frac{2625}{15} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}{3+5+5+5+7} = \frac{105}{15} = 7 \quad ; \quad \left[\frac{2625}{2+6+2+5} = 175 = 1^1 + 7^2 + 5^3 \quad \text{und} \quad \frac{175}{1 \cdot 7 \cdot 5} = 5 \right]$$

analog: $25 \cdot \underline{105} = \underline{2625}$; $9 \cdot \underline{72} = \underline{648}$; $36 \cdot \underline{16} = \underline{576}$; $91 \cdot \underline{30} = \underline{2730}$
 $38 \cdot \underline{70} = \underline{2660}$; $91 \cdot \underline{105} = \underline{9555}$; $2 \cdot \underline{728} = \underline{1456}$;

'Nette Produkte' :

$$30 \cdot 84 = 2520 \quad ; \quad \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2+3+5} = 3 \quad ; \quad \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7}{2+2+3+7} = 2 \cdot 3 \quad ; \quad \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2+2+2+3+3+5+7} = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$70 \cdot 84 = 5880$, aber z.B. nicht $72 \cdot 84$

Nette Zahlenpaare vom Typ abc und abcd mit den Ziffern a,b,c,d.

$$450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2, 4500 \quad ; \quad \text{aber nicht } 45000 \quad \quad 540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \quad ; \quad 5400, \text{ aber nicht } 54000;$$

$$624, 6248 \quad ; \quad 646, 6461 \quad ; \quad 897 = 3 \cdot 13 \cdot 23, 8970$$

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7, 840, 8400 \quad ; \quad 84 \cdot 10^n, n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 13, 14, 18, \dots\};$$

$$\frac{2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 5)^n}{14+7n} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 5)^n}{n+2} \quad ; \quad 588 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2, 5880, \dots, 588 \cdot 10^n, \quad \underline{0 \leq n < 6} !$$

Umkehrung der Ziffernfolge: 27, 72 ; $2079 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11, 9702 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11$

Verdopplung in der Ziffernfolge: $4284 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 17$

Definition: Eine ungerade, echt-nette Zahl heißt **'super-nett'** , wenn sie nur aus (mindestens 2) voneinander verschiedenen Primfaktoren besteht. Beispiele: 105, 286, 646, 897, 6461, 15015, ...

Statistik zu netten Zahlen

Unter den ersten 10000 Zahlen sind 31 ungerade echt-nette Zahlen, davon sind 14 super-nett.
 Unter den ersten 500000 Zahlen sind ca. 41550 Primzahlen und 3070 echt-nette Zahlen (d.h. Zahlen mit mehr als einem Primfaktor); es gibt also ca. 0.62% echt-nette Zahlen in diesem Bereich.