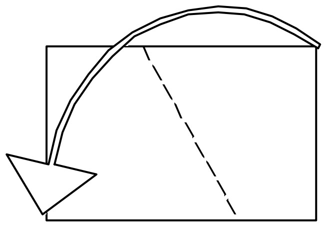
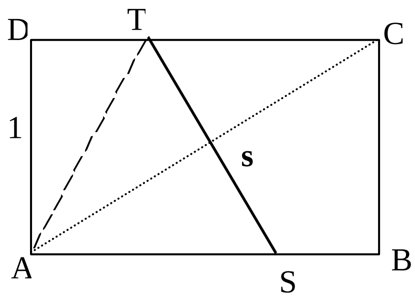
Faltungen am Rechteck

Die 'Faltlinie' **s** entsteht beim Falten eines Rechteckes im DIN-A-Format (1 : $\sqrt{2}$ - Rechteck), wenn die rechte obere Ecke des Blattes auf die linke untere Ecke gelegt wird.

- Skizziere das <u>gefaltete</u> Rechteck





- Steht die Strecke **s** senkrecht auf der Diagonalen ?
- Was kann man über das Dreieck AST aussagen?
- Wie lang ist die Strecke TC ? Wie lang ist die Strecke s?
- In welchem Verhältnis teilt der 'Knickpunkt' T die Rechteckseite?
- Untersuche das Viereck ASCT und bestimme seinen Flächeninhalt.

Untersuche Sonderfälle , Variationen , Verallgemeinerungen zu den Fragestellungen.

- Wie lassen sich die Antworten bei anderen Rechtecksformen (z.B. 1:2-Rechteck; Quadrat; Rechteck mit den Seitenlängen a und $k \cdot a$, bzw. mit 1 und k) verallgemeinern?

- Welchen Flächeninhalt hat die entstandene Faltfigur (ein 'Fünfeck') für $k \geq 1$?
  Zeige , dass ihr Flächenanteil zwischen 50% und 75% der Rechtecksfläche liegt.
  Für welches Seitenverhältnis k hat das Fünfeck 3 gleich lange Seiten?

- Wie lässt sich die Faltlinie zeichnerisch konstruieren, wenn die rechte obere Ecke auf einen beliebigen Punkt P der gegenüberliegenden Kante AD gefaltet wird?

- Untersuche in einem beliebigen Rechteck den Fall, dass die 'Faltlinie' orthogonal zur Diagonalen ist und durch die rechte untere Ecke B geht. Sie teilt DC im Punkt L. Bestimme die Länge |LC|.

- Wie teilt dieses Lot BL von einer Ecke auf die Diagonale die Diagonale AC im Punkt Q auf? Bestimme die Streckenlänge |QB|

- Zeige: Die Länge von TC ist das arithmetische Mittel aus den Längen |DC| und |LC|. Bestimme damit erneut die Länge der Strecke TC.

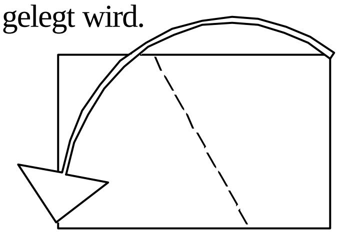
- Bestimme den Kosinus des Schnittwinkels der kreuzenden Faltlinien, wenn von rechts oben nach links unten und umgekehrt gefaltet wird.

- Wie kann man durch Faltung nachweisen, ob ein Rechteck mit 1:$\sqrt{3}$ vorliegt?

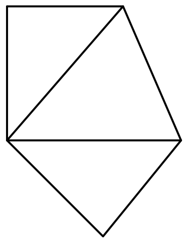
- In welchem Rechteck ist das Dreieck AST gleichseitig?
  Wie kann man beim DIN-A-Format gleichseitige Dreiecke falten?

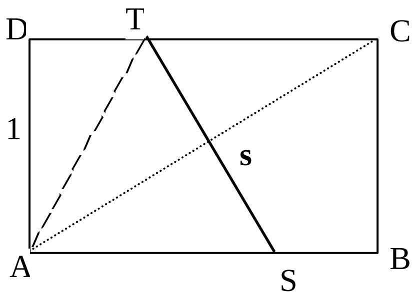
Faltungen am Rechteck - Lösungshinweise

Die 'Schräglinie' **s** entsteht beim Falten eines Rechteckes im DIN-A-Format, indem die rechte obere Ecke des Blattes auf die linke untere Ecke gelegt wird.



- Skizziere das gefaltete Rechteck





Mit den Rechteckseitenlängen **1** und **k** gilt:

- Steht die Strecke **s** senkrecht auf der Diagonalen ?
  Ja; z.B. Die Seitenhalbierende im gleichschenkligen Dreieck ATC ist auch Höhe.

- Was kann man über das Dreieck AST aussagen?
  Es ist gleichschenklig

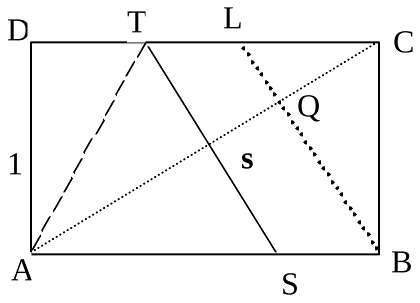
- Wie lang ist die Strecke TC ?
  $|TC| = 0.5 \cdot (k + \frac{1}{k})$ *; mit den Seiten a und b gilt:* $|TC| = \frac{a^2 + b^2}{2b}$ *; DIN-A-Format:* $0.75\sqrt{2}$

- Wie lang ist die Strecke s?
  $s = \frac{d}{k} = \frac{\sqrt{k^2+1}}{k}$ *; DIN-A-Format* $\sqrt{3/2}$

- In welchem Verhältnis teilt der 'Knickpunkt' T die Rechteckseite?
  $\frac{k^2-1}{k^2+1}$; *DIN-A-Format 1: 3*

- Untersuche das Viereck ASCT und bestimme seinen Flächeninhalt.
  Die Raute ASCT hat den Inhalt : $0.5 \cdot (k + \frac{1}{k})$

Untersuche Sonderfälle , Variationen ,Verallgemeinerungen - Lösungshinweise



- Wie lassen sich die Antworten bei anderen Rechtecksformen (z.B. 1:2-Rechteck, Quadrat; Seitenlängen a und k·a bzw. mit 1 und k) verallgemeinern?

  Im 1:2 - Rechteck ist die Faltlinie halb so lang wie die Diagonale; im Quadrat ist es die Diagonale; im 1: $\sqrt{3}$ *-Rechteck hat sie 2/3 der langen Seite und ist doppelt so lang wie die Strecke LC.*

- Welchen Flächeninhalt hat die entstandene Faltfigur (ein Fünfeck) für $k \geq 1$?

  Zeige , dass ihr Flächenanteil zwischen 50% und 75% der Rechtecksfläche liegt.

  Flächeninhaltsformel: 0.25 (3k - 1/k) ; Anteil 0.25 (3 - $1/k^2$)

  Fünfeck mit 3 gleichen Seiten: s = TC ergibt $k = \sqrt{3+2\sqrt{3}}$

- Wie lässt sich die Faltlinie zeichnerisch konstruieren, wenn die rechte obere Ecke auf einen beliebigen Punkt P der gegenüberliegenden Kante AD gefaltet wird?

  Die Mittelsenkrechte zu PC schneidet in T

- Untersuche den Fall, dass die Faltlinie orthogonal zur Diagonalen ist und durch die rechte untere Ecke geht. Sie teilt die Seite DC in L. Bestimme die Länge |LC|.

  Es entsteht die Länge |LC| = 1/k ; Begründung über ähnliche Dreiecke;

  im Sonderfall DIN-Format entsteht die Seitenmitte , da $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$

- Wie teilt dieses Lot BL von einer Ecke auf die Diagonale die Diagonale AC im Punkt Q auf? Bestimme die Streckenlänge |QB|

  Q teilt die Diagonale im Verhältnis $1{:}k^2$; (*DIN-Format Aufteilung 1:2)*

  Die Strecke QB hat die Länge 1/s , d.h. |QB| = k/d (durch Zerlegung des Rechtecks sieht man: QB ist 2. Seite des flächengleichen Rechtecks über der Diagonalen)

- Zeige: Die Länge von TC ist das arithmetische Mittel aus den Längen |DC| und |LC|. Bestimme damit erneut die Länge der Strecke TC.

  |TC| ist das arithmetische Mittel aus k und 1/k.

- Bestimme den Kosinus des Schnittwinkels der kreuzenden Faltlinien, wenn von rechts oben nach links unten und umgekehrt gefaltet wird.

  cos $\alpha = (k^2-1)/(k^2+1)$ *; die kreuzenden Faltlinien schneiden aus AB eine Strecke der Länge |LC| aus.*

- In welchem Rechteck ist das Dreieck AST gleichseitig?

  Im 1: $\sqrt{3}$ Rechteck

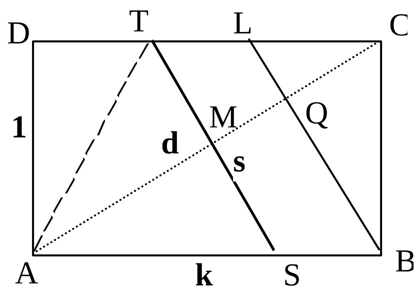
- Wie kann man durch Faltung nachweisen, ob ein Rechteck mit 1: $\sqrt{3}$ vorliegt?

  Diagonalenlänge 2 ; es entstehen 'Tütenfomren'

- Wie kann man beim DIN-A-Format ein gleichseitiges Dreieck falten?

  z.B.: Halbe Diagonale mit $\sqrt{3}/2$ und es ist $(\sqrt{3}/2)^2 + (1/2)^2 = 1$!

Zusammenfassende Berechnung der auftretenden Streckenlängen



Mit |TS| = |LB| und der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und BCL ergeben sich die folgenden Proportionen und Längen.

$$\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{k}}, \quad \text{d.h.} \quad \mathbf{s} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{k}} \quad \textbf{oder} \quad \mathbf{s} = \frac{\sqrt{\mathbf{k}^2+\mathbf{1}}}{\mathbf{k}} \quad \textbf{oder } \mathbf{s} = \sqrt{\mathbf{k} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}^2}}$$

$$\frac{|\,\mathbf{LC}\,|}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}, \quad \text{d.h.} \quad |\,\mathbf{LC}\,| = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}$$

Mit **|TC|** = **|AT|** = **|AS|** und der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und AMT ergeben sich die folgenden Proportionen und Längen.

$$\frac{|\,\mathbf{AT}\,|}{\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{2}}} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{k}}, \quad \text{d.h.} \quad |\,\mathbf{AT}\,| = \frac{\mathbf{d}^2}{\mathbf{2k}} \quad \textbf{oder} \quad |\,\mathbf{AT}\,| = \frac{\mathbf{k}^2+\mathbf{1}}{\mathbf{2k}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(|\,\mathbf{CD}\,| + |\,\mathbf{CL}\,|)$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und BCQ ergeben sich die folgenden Proportionen und Längen.

$$\frac{|\,\mathbf{QB}\,|}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{d}}, \quad \text{d.h.} \quad |\,\mathbf{QB}\,| = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s}}$$

$$\frac{|\,\mathbf{QC}\,|}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{d}}, \quad \text{d.h.} \quad |\,\mathbf{QC}\,| = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{k}^2+\mathbf{1}}}$$